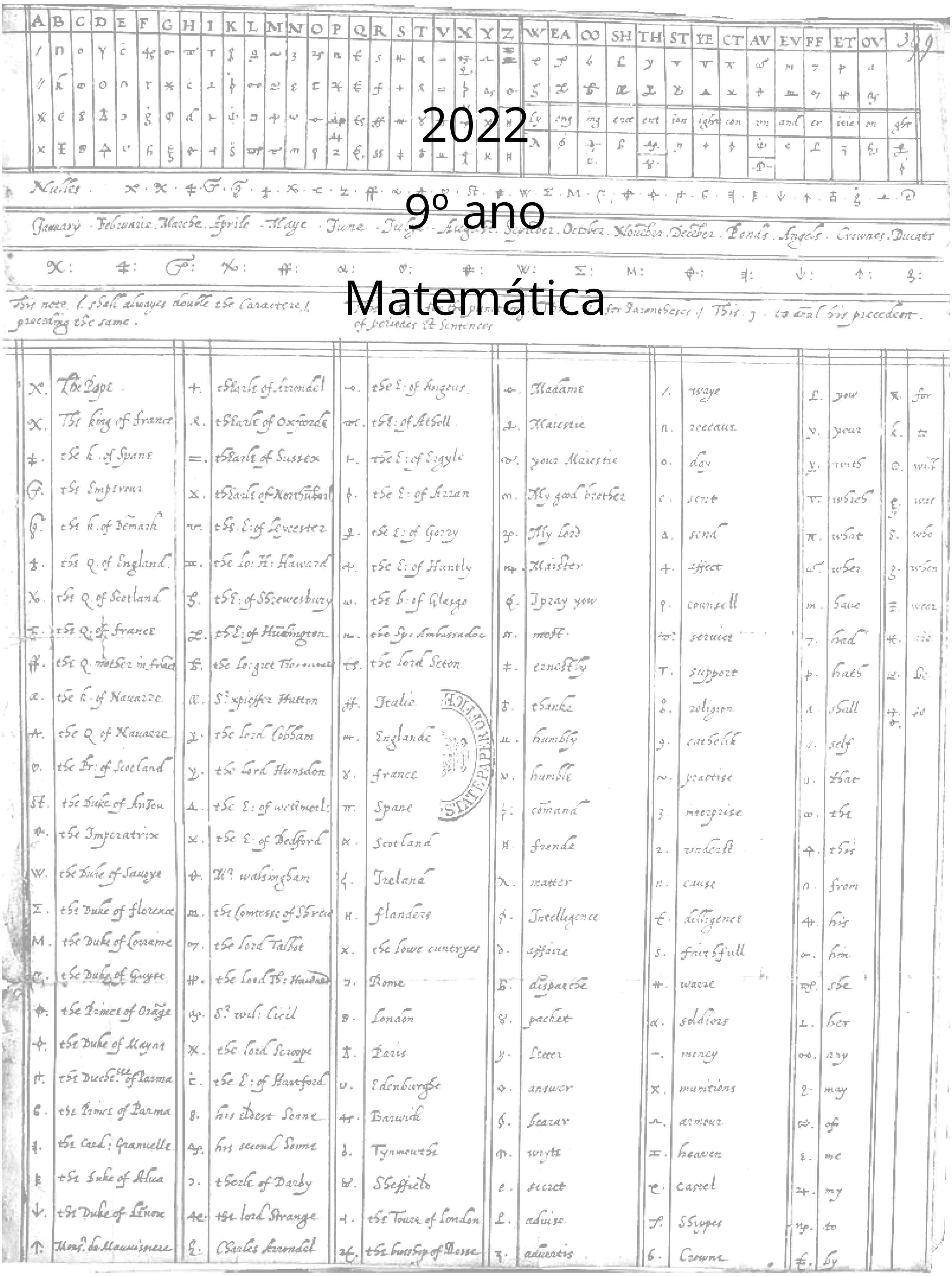


2022

9º ano

Matemática

Arco Escola Cooperativa

arco

arco

00 - Informações gerais e combinados

Além da sala de aula, a disciplina de matemática no 9º ano conta com outros dois espaços: a página online do curso, acessível em arco.coop.br/~jseckler/mat-9-2022, e com um espaço no Google Sala de Aula[1] (também conhecido como "GSA").

Atividades avaliadas

- Três vezes por bimestre, vocês deverão entregar a resolução de uma atividade. Vocês terão uma semana para fazê-la.
- Tragam dúvidas! Para ter dúvida, tem que tentar fazer. Ou seja: comecem a fazer bem antes da data de entrega.
- Quando eu pedir para vocês entregarem alguma coisa, eu quero que vocês consigam me mostrar se vocês investigaram, refletiram, raciocinaram, e fizeram conexões sobre aquilo de que estamos falando. Disso decorre:
  - Não adianta só me mostrar a **etapa final** do seu trabalho. Mostre o passo a passo do seu raciocínio**;**
  - Pode ser criativo! Se você me mostrar esses sinais de trabalho e intimidade com o conteúdo, eu vou aceitar formas heterodoxas de resolução de atividades, por exemplo:
    Um texto corrido
    Um programa de computador
    Uma planilha eletrônica
    Algo que você fez no minecraft
- Se eu propuser uma atividade individual mas você achar que faz sentido fazê-la em grupo, vou aceitar, desde que isso seja avisado com antecedência ou na própria entrega. O contrário não vale: se eu passar uma atividade em grupo, não vou aceitar entregas individuais.
- Se tirar foto do caderno, tenha certeza de que a orientação da foto está correta. Se esforce, por favor, para que a foto saia com boa qualidade.
- Datas de entrega:
  - 1º bimestre: 25/02, 18/03, 08/04;
  - 2º bimestre: 29/04, 20/05, 10/06.

[1] Link para a sala: https://classroom.google.com/u/1/c/NDU1NDMwNTkwNTUy. Código: dofc6j.

Avaliação do caderno

- Cada estudante entregará o caderno para avaliação uma vez por bimestre, numa data especificada na tabela abaixo.
- Os cadernos serão recolhidos às segundas-feiras, de acordo com as datas na tabela. Eles serão devolvidos na aula seguinte ou no mesmo dia.

Entrega de caderno

<table>
<tr><th colspan="2">1º bimestre</th><th colspan="2">2º bimestre</th></tr>
<tr><td rowspan="5">14/02</td><td>Pablo Gonçalves de Almeida</td><td rowspan="3">11/04</td><td>Emilly Oliveira de Sousa</td></tr>
<tr><td>Andrei Marra Galery</td><td>Lucas Alves Nascimento</td></tr>
<tr><td>Lucas Alves Nascimento</td><td>Lorena Ferraz Otani</td></tr>
<tr><td>Marina de Oliveira Fernandes</td><td rowspan="3">18/04</td><td>Gabriela Pereira de Castro Casa Nova Taranto Reis</td></tr>
<tr><td>Liz Gentile Diez de Sollano</td><td>Liz Gentile Diez de Sollano</td></tr>
<tr><td rowspan="5">07/03</td><td>Emilly Oliveira de Sousa</td><td>Taís Buarque Berlendis de Carvalho</td></tr>
<tr><td>Lorena Ferraz Otani</td><td rowspan="4">02/05</td><td>Martin Tristão de Souza Fray Rezende</td></tr>
<tr><td>Nina da Silva Lima</td><td>Luca Brasil Fortunato</td></tr>
<tr><td>Yuri Nakamoto Campanário</td><td>Yasmin Santos Freire</td></tr>
<tr><td>Yasmin Santos Freire</td><td>Pablo Gonçalves de Almeida</td></tr>
<tr><td rowspan="6">21/03</td><td>Taís Buarque Berlendis de Carvalho</td><td rowspan="4">09/05</td><td>Nina da Silva Lima</td></tr>
<tr><td>Miguel Bittencourt de Campos</td><td>Heloísa Cipola Nyari</td></tr>
<tr><td>Martin Tristão de Souza Fray Rezende</td><td>Leonardo Vidigal</td></tr>
<tr><td>Tiê Fernandes Barreto Peixoto Cappucci</td><td>Francisco Ayer Toledano dos Santos</td></tr>
<tr><td>Violeta Luz Souza Spinola</td><td rowspan="4">23/05</td><td>Tiê Fernandes Barreto Peixoto Cappucci</td></tr>
<tr><td>Francisco Ayer Toledano dos Santos</td><td>Luiza Lanfranchi Vaz Djurovic</td></tr>
<tr><td rowspan="6">28/03</td><td>Kauê Pimentel Modern</td><td>Andrei Marra Galery</td></tr>
<tr><td>Leonardo Vidigal</td><td>Violeta Luz Souza Spinola</td></tr>
<tr><td>Luiza Lanfranchi Vaz Djurovic</td><td rowspan="4">30/05</td><td>Marina de Oliveira Fernandes</td></tr>
<tr><td>Gabriela Pereira de Castro Casa Nova Taranto Reis</td><td>Yuri Nakamoto Campanário</td></tr>
<tr><td>Heloísa Cipola Nyari</td><td>Miguel Bittencourt de Campos</td></tr>
<tr><td>Luca Brasil Fortunato</td><td>Kauê Pimentel Modern</td></tr>
</table>

Avaliações em sala de aula (“provas”)

- Ao fim de cada bimestre, faremos uma prova. Seu conteúdo será a matéria vista até aquele momento. Sua duração será uma aula inteira.
- Datas:
    - 3º bimestre: 08 de abril
    - 4º bimestre: 10 de junho

Critérios de avaliação

- **Participação**: presença nas aulas e interação durante a aula. Alguns exemplos que contam positivamente para a nota de participação: fazer perguntas, responder perguntas, não conversar paralelamente à aula, fazer o que é pedido, etc;
- **Atividades avaliadas**: entrega, qualidade, interação com a turma ou com o grupo, interação com o professor;
- **Avaliação em sala de aula**: desempenho na prova;
- **Caderno:** aulas anotadas, completude, corretude, capricho, etc;

A nota de um estudante é calculada da seguinte forma, a cada bimestre.

$$\mathbf{NF} = 0{,}3 \cdot \mathbf{Pa} + 0{,}3 \cdot \mathbf{A} + 0{,}2 \cdot \mathbf{Pr} + 0{,}2 \cdot \mathbf{C}$$

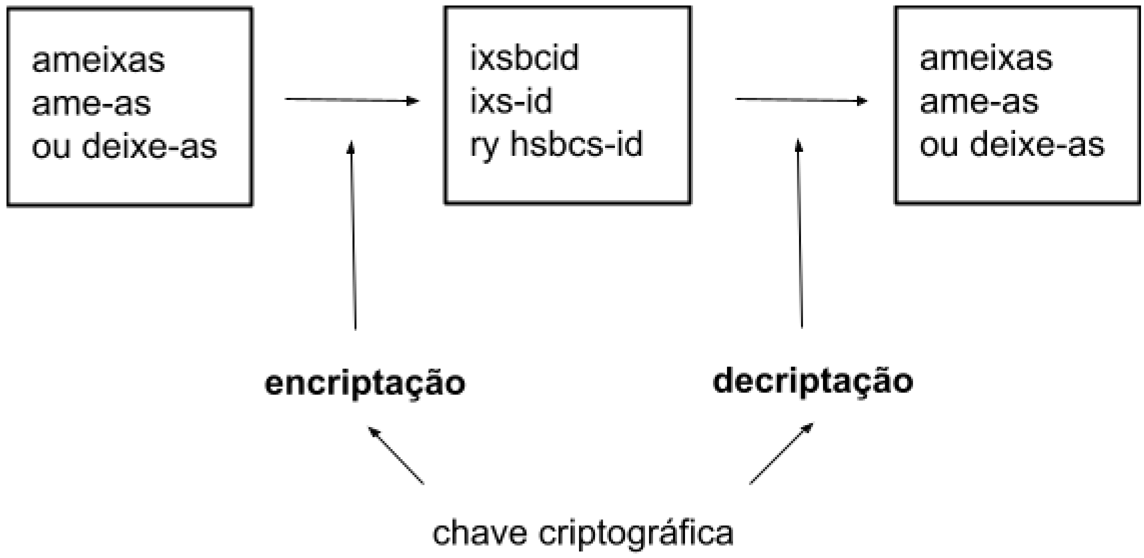
Em que **NF** é a nota final, **A** é a nota de atividades, **Pa** é a nota de participação, **Pr** é a nota da prova e **C** é a nota de caderno. O conceito final é atribuído seguindo mais ou menos o seguinte mapeamento (ajustes poderão ser feitos):

insatisfatório:	$0 \leq MF < 6$
satisfatório:	$6 \leq MF < 9$
plenamente satisfatório:	$9 \leq MF \leq 10$

01 - Criptografia

A palavra **criptografia** provém etimologicamente das palavras *kryptós*, "escondido", e *gráphein*, "escrita"[2], o que sugere a ideia de uma “escrita escondida”. A criptografia possibilita que uma mensagem seja enviada sem que qualquer pessoa, a não ser o remetente e o destinatário, consiga lê-la.

Para tornar uma mensagem secreta, usa-se uma **cifra**: um algoritmo ou procedimento que converte um texto em um texto cifrado. Chamamos essa conversão de **encriptação**. A não ser que se tenha a chave criptográfica que permita reverter a cifra, o texto cifrado é incompreensível. Chamamos essa reversão de **decriptação**.

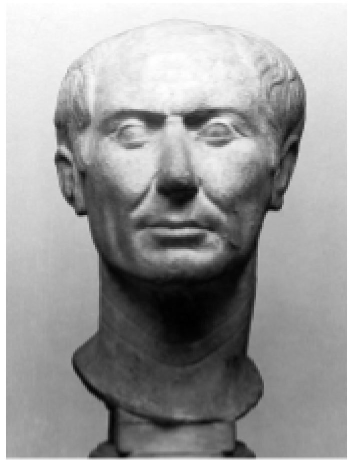


Há muitas décadas, a teoria e técnicas da criptografia estão intimamente ligadas ao computador e à computação. No entanto, cifras são usadas desde muito antes disso sequer existir: os primeiros usos de criptografia datam do século XX a.C. Muito tempo depois, no primeiro século antes de Cristo, em Roma, um tipo importante de cifra ganharia seu nome.

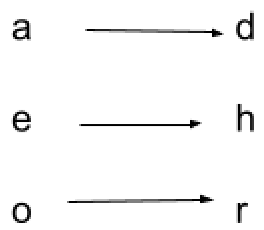
[2] Pense nas palavras *cripta* e *cartografia*, por exemplo.

Cifra de César

Acredita-se que Júlio César, o político e líder militar romano, usava esse tipo de criptografia em suas correspondências pessoais. Para encriptar suas mensagens, César deslocava cada letra três (por exemplo) posições no alfabeto à frente. Nesse caso, a letra “a”, por exemplo, vira “d”. A letra “e” vira “h”.

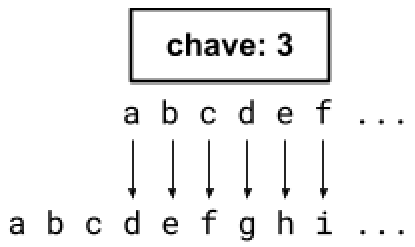


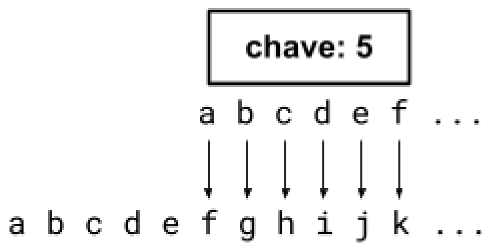
“alea jacta est”



Assim, a aplicação da cifra na mensagem *“brutus”* resulta na palavra *“euxwxv”*. Aqui o número 3 funciona como **chave criptográfica**: o remetente da mensagem deve usar esse número para encriptar a mensagem e qualquer um que queira ler a mensagem deve conhecer esse número para decriptá-la. Se se escolhesse outra chave, por exemplo, o número 5, o texto cifrado seria diferente: “*brutus”* tornaria-se “*gwzyzx”.*

Pense que a criptografia é como um **cadeado**. A encriptação é **trancar** o cadeado, e a decriptação é **abri-lo**. Para fazer as duas coisas, precisamos de uma chave. Quem conhece ou tem uma cópia dessa chave consegue abrir o cadeado.





Exercício 01.0

a) Explique com suas palavras qual deve ser o procedimento de decriptação de uma mensagem encriptada com a cifra de césar usando como chave o número 3.

b) Para usar a cifra de César na chave 3 devemos substituir cada letra por outra, que esteja três posições no alfabeto à frente dela. Mas as letras finais do alfabeto (“x”, “y”, “z”, etc) não têm uma letra “três à frente” delas. O que você faria com elas? Escreva com suas palavras e use um diagrama como o da página anterior para explicar sua solução.

c) Escolha uma chave criptográfica e encripte a seguinte mensagem usando a cifra de César:

ameixas
ame-as
ou deixe-as

d) Sabendo que a chave criptográfica utilizada foi o número 5, decripte a seguinte mensagem: “*fyj yz, gwzyzx?*”

e) Descubra você mesmo a chave e decripte a seguinte mensagem: *“itmi rikbi mab”*

Cifras de substituição

A cifra de César faz parte de uma classe maior de técnicas chamadas de **cifras de substituição**. Em sua forma mais simples, são cifras que atrelam ao alfabeto convencional um outro alfabeto, chamado alfabeto de substituição, e trocam as letras de um pelo outro. É o que acontece na cifra de César, em que o alfabeto de substituição é o alfabeto comum deslocado para a direita. Outro modo de criar um alfabeto de substituição é escrever alfabeto convencional de trás para frente. Outro exemplo ainda é colocar uma palavra à frente do alfabeto convencional e excluir do restante dele as letras repetidas. Veja alguns exemplos:

1.	abcdefghijklmnopqrstuvwxyz defghijklmnopqrstuvwxyz	**cifra de César**
2.	abcdefghijklmnopqrstuvwxyz zyxwvutsrqponmlkjihgfedcba	**cifra de Atbash**
3.	abcdefghijklmnopqrstuvwxyz criptoabdefghjklmnqsuvwxyz	**cifra de palavra-chave**

Exercício 01.1 Considere o terceiro exemplo acima. O que pode, nesse caso, ser considerado como chave criptográfica?

Exercício 01.2 Cláudio tentou inventar sua própria cifra de substituição. Observe o resultado a que ele chegou:

```
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
torrefghijklmnpqsuvwxyzabc
```

a) Explique com suas palavras qual é o procedimento inventado por Cláudio para formar o alfabeto na linha de baixo. Identifique qual é a chave utilizada.

b) A chave utilizada por Cláudio, nesse caso, tem um problema. Que problema é esse?

c) Faça como Cláudio e invente a sua própria cifra. Pode ser uma cifra de substituição ou não. Seja criativo! Em seguida, descreva como sua cifra funciona e dê um exemplo, criptografando a seguinte frase:

"A ponte não é sustentada por esta ou aquela pedra, mas pela curva do arco que estas formam"

Análise de frequências

Uma grande desvantagem dessas formas simples de substituição é que a **frequência** com que cada letra aparece é preservada. Em português, a letra "a" é usada com mais frequência que qualquer outra. Se sua cifra traduz "a" para "d", como nosso primeiro exemplo, então a tendência é que a letra "d" seja a que mais aparece no texto cifrado! Esse fato pode ser usado para descobrir a chave criptográfica e decriptar a mensagem.

Esse raciocínio foi usado no século XVI para desvendar mensagens conspiratórias de Maria da Escócia contra a Rainha Elizabeth, levando à sua execução em 1587.

Exercício 01.3 O texto abaixo é encriptado com a cifra de César, e seu original está em português.

Através da análise de frequência das letras que aparecem nele, descubra qual chave foi utilizada para encriptá-lo.[3]

> "H tlyjhkvyph l, hualz kl abkv, bt viqlav lealypvy, bth jvpzh xbl, wlshz zbhz wyvwyplkhklz, zhapzmhg uljlzzpkhklz obthuhz kl xbhsxbly lzwljpl. Xbl lzzhz uljlzzpkhklz aluoht h zbh vypnlt uv lzavthnv vb uh mhuahzph, h zbh uhabylgh lt uhkh hsalyh h xblzahv. Uhv zl ayhah ahv wvbjv hxbp kl zhily jvtv zhv zhapzmlpahz lzzhz uljlzzpkhklz: ptlkphahtlual, zl v viqlav l bt tlpv kl zbizpzalujph, vb pukpylahtlual, zl l bt tlpv kl wyvkbjhv."

O advento dos computadores

Os desenvolvimentos na área da computação do século XX fizeram avançar imensamente as técnicas de criptografia — mas também as de **criptoanálise**, ou seja, as técnicas que permitem decriptar uma mensagem mesmo não conhecendo a chave criptográfica.

Uma das primeiras cifras usadas por computadores utilizada em larga escala foi a **DES** (*Data encryption standard*, do inglês "padrão de criptografia de dados"), desenvolvida em 1977 pela **IBM**, uma empresa americana de tecnologia, e pela **NSA**, a agência de inteligência americana. Essa cifra usava uma chave criptográfica binária, ou seja, composta de zeros e uns — ideais para o uso por computadores. De início, essa chave era composta de 56 dígitos binários (*bits)*, ou seja, 56 zeros ou uns. Um exemplo de uma chave usada por essa cifra seria, portanto:

10001011100011111101111111001100011011011101010010110 0

Isso significa que existem 2^{56}chaves diferentes que podem ser usadas pela cifra. Hoje em dia existem computadores que conseguem **testar** todas as chaves possíveis de serem usadas (todas as 2^{56} chaves) em apenas alguns dias. Esse tipo de ataque é chamado de **ataque de força bruta**. Qualquer um com acesso a um computador desse consegue, portanto, quebrar a criptografia da DES. Portanto, ela foi considerada **insegura**.

Em 2001, esse protocolo foi atualizado e renomado para **AES** (*Advanced encryption standard*, do inglês "padrão de criptografia avançado"). O novo protocolo usa chaves de até 256 *bits*. Um exemplo de uma chave dessa é a seguinte:

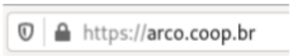
[3] Desafio: decripte esse trecho, revelando o texto original.

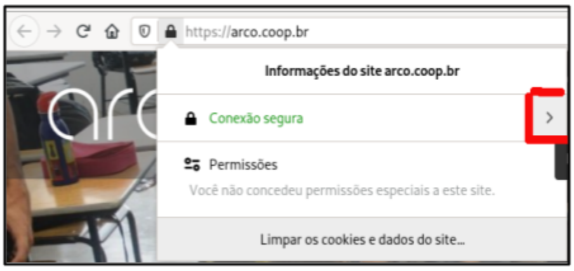
1100010101101110111011001110100011011111000011011010001011
01011000001101111011111011110111111110111010010001110011001
00111110011111000010001001001101011111010000011100101001
10101111000101001110100010100111101101000010010000111010
0000010010011111001010111000000

Isso significa que existem 2^{216} chaves diferentes que podem ser usadas pela cifra.

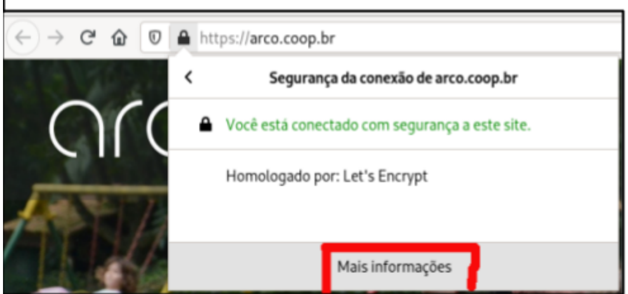
Essa nova versão é considerada segura, tanto é que é usada diariamente no mundo inteiro. Agora mesmo, muito provavelmente, há alguns dados armazenados no seu celular ou computador criptografados com AES; sua conexão wifi é criptografada usando AES; e o seu acesso à internet é quase sempre criptografado com AES.

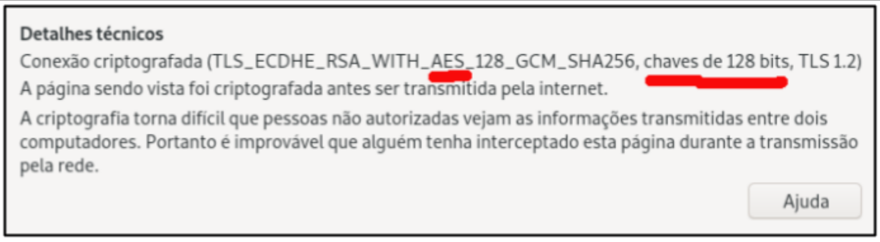
Quer ver se sua conexão na internet está criptografada mesmo? Nos navegadores de internet modernos (*firefox* e *google chrome*, por exemplo) é possível verificar algumas informações sobre a criptografia. Vamos usar o *firefox* como exemplo. Clique no pequeno cadeado ao lado do endereço do site para mais informações:





Parece que o site da Arco usa conexões criptografadas! Vamos ver mais informações…



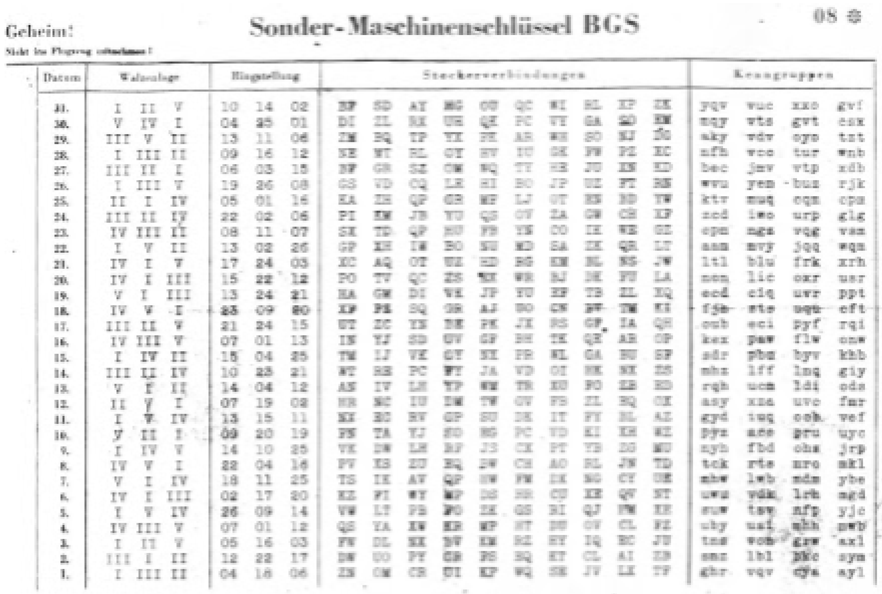


Nessa caixa de informações, podemos ver que de fato estou usando o padrão AES, com uma chave de 128 bits, para criptografar todo o tráfego do meu computador com o site da Arco! Se não houver criptografia, o navegador avisa com um cadeado riscado ou aberto:

Evite compartilhar informações pessoais e senhas em sites que não usam criptografia. Algum agente malicioso espionando o seu tráfego poderá ficar sabendo essas informações.

Troca de chaves

Até agora, as técnicas de criptografia que analisamos contam com chaves criptográficas que são conhecidas por quem manda a mensagem e por quem a recebe: o remetente encripta a mensagem usando uma chave e o destinatário decripta a mensagem usando a **mesma chave.** Anteriormente, essas chaves eram compartilhadas presencialmente ou fisicamente. César contaria a um correspondente seu, usando sua voz, qual chave que deveria ser usada entre eles para se comunicarem. Durante a segunda guerra, os Alemães usavam tabelas de códigos a serem usados, um a cada dia, como chave criptográfica para sua comunicação.



Geheim!

Nicht ins Flugzeug mitnehmen!

Sonder-Maschinenschlüssel BGS

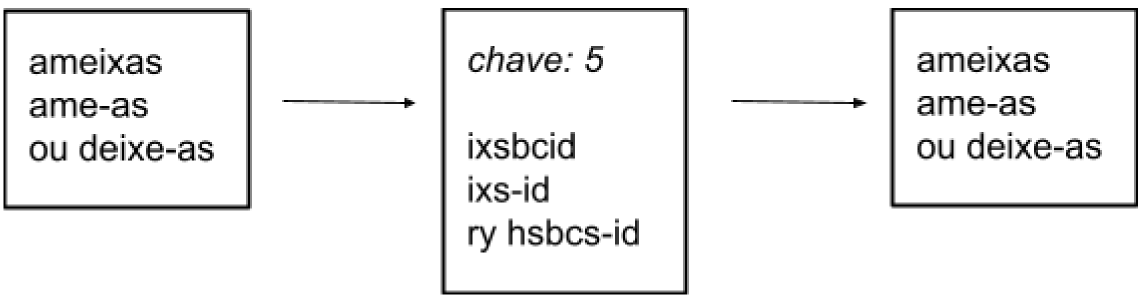
08

Datum	Walzenlage			Ringstellung			Steckerverbindungen										Kenngruppen			
31.	I	II	V	10	14	02	EF	SD	AT	MG	OU	QC	WI	HL	XP	ZK	yqv	vuc	xxo	gvl
30.	V	IV	I	04	25	01	DI	ZL	RX	UH	QK	PC	VT	GA	SO	EW	mqy	vts	gvt	csx
29.	III	V	II	13	11	06	ZM	BQ	TP	YX	FK	AR	WH	SO	KJ	[illegible]	aky	vdv	oyo	tzt
28.	I	III	II	09	16	12	NE	WT	HL	GY	RV	IU	GK	FW	PZ	EC	nfh	vco	tur	wnb
27.	III	II	I	06	03	15	BF	GR	SZ	CM	NQ	TY	HE	JU	EN	XD	bec	jmv	vtp	xdb
26.	I	III	V	19	26	08	GS	VD	CQ	LX	HI	BO	JP	UZ	FT	RN	wvu	yem	buz	rjk
25.	II	I	IV	05	01	16	KA	IH	QF	GE	MF	LJ	UT	NS	BD	TW	ktr	muq	cqn	cpu
24.	III	II	IV	22	02	06	PI	EW	JB	YU	QS	OY	ZA	GW	CH	XF	zcd	iwo	urp	glg
23.	IV	III	II	08	11	07	SX	TD	QF	HU	FB	YE	CO	IK	WE	GL	cpn	mga	vqg	vam
22.	I	V	II	13	02	26	GP	XH	IW	BO	SU	MD	SA	IX	QR	LT	aam	mvy	jqq	wqn
21.	IV	I	V	17	24	03	XC	AQ	OT	UZ	ED	RG	KM	BL	NS	JW	ltl	blu	frk	xrh
20.	IV	I	III	15	22	12	PO	TV	QC	ZS	MX	WR	BJ	DK	FU	LA	non	lic	oxr	usr
19.	V	I	III	13	24	21	HA	GW	DI	VX	JP	YU	EF	TB	ZL	XQ	eod	ciq	uvr	ppt
18.	IV	V	I	23	09	20	XF	PE	SQ	GR	AJ	BO	CN	PT	TM	KI	fje	ete	uqn	eft
17.	III	II	V	21	24	15	UT	ZC	YE	BE	PK	JX	RS	GF	IA	QH	oub	eci	pyf	rqi
16.	IV	III	V	07	01	13	IN	YJ	SD	UV	GF	BH	TK	QZ	AR	OP	kex	pmw	flw	onw
15.	I	IV	II	15	04	25	TM	LJ	VK	GY	XI	FR	NL	GA	BU	EP	adr	pbm	byv	kbb
14.	III	II	IV	10	23	21	WT	RH	PC	FY	JA	VD	OI	HK	NX	ZS	mhz	lff	lnq	gly
13.	V	I	II	14	04	12	AS	IV	LK	YP	NW	TR	XU	FO	ZE	ED	rqh	ucm	ldi	ods
12.	II	V	I	07	19	02	HR	NC	IU	DW	TW	OV	FB	ZL	BQ	CX	asy	xna	uvc	fmr
11.	I	V	IV	13	15	11	MX	EC	RV	GP	SU	DK	IT	FY	HL	AZ	gyd	iuq	ooh	vef
10.	V	II	I	09	20	19	FN	TA	YJ	SO	MG	PC	YD	KI	EH	WZ	pyz	ace	pru	uyc
9.	I	IV	V	14	10	25	VK	DW	LH	BF	JS	CX	PT	YB	DG	MU	nyb	fbd	oha	jrp
8.	IV	V	I	22	04	16	FV	KS	ZU	EQ	DW	CH	AO	RL	JN	TD	tck	rte	nro	mkl
7.	V	I	IV	18	11	25	TS	IK	AY	QP	UW	FM	DX	NG	CY	OE	mbw	lwb	mdm	ybe
6.	IV	I	III	02	17	20	KL	FI	WY	MP	DS	HR	CU	XE	QV	NT	uwz	vdk	lrb	mgd
5.	I	V	IV	26	09	14	VW	LT	PB	MO	IX	GS	RI	QJ	FN	HE	euw	tsv	nfp	yjc
4.	IV	III	V	07	01	12	QS	YA	EW	KR	MP	HT	DU	OV	CL	FZ	uby	ual	mhh	pwb
3.	I	II	V	05	16	03	FN	DL	MX	BV	KW	RZ	EY	IQ	HC	JU	tns	wob	grw	axl
2.	III	I	II	12	22	17	DW	UO	PY	GR	PS	SQ	KT	CL	AI	ZB	smz	lhl	bkc	syn
1.	I	III	II	04	16	06	ZN	OM	CR	UI	KP	WQ	SK	JV	LX	TF	ghr	vqv	qya	ayl

Tabela de chaves usada pelos alemães na
segunda guerra mundial

Na era da internet, isso passa a não fazer mais sentido. Imagine ter que consultar uma tabela de códigos para acessar a *Wikipedia*!

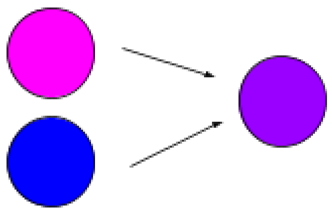
Também não é possível simplesmente enviar uma chave de um computador para o outro. Afinal, uma mensagem como a seguinte não é exatamente segura, certo?



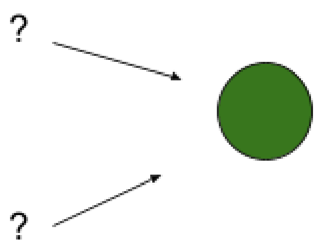
O objetivo da criptografia é que ninguém consiga ler a mensagem privada. Mas se a chave faz parte da mensagem, esse objetivo não é realizado! Fez-se necessário um método para que dois computadores **entrem em acordo** sobre qual chave usar sem que seja necessário enviar a chave junto da mensagem. Um algoritmo que realiza essa tarefa é chamado de **troca de chaves**.

A principal ferramenta para essa técnica são as chamadas **funções de mão única**. São funções fáceis de serem calculadas em uma direção, mas muito difíceis de inverter. Para entender melhor isso, vamos usar uma analogia com cores.

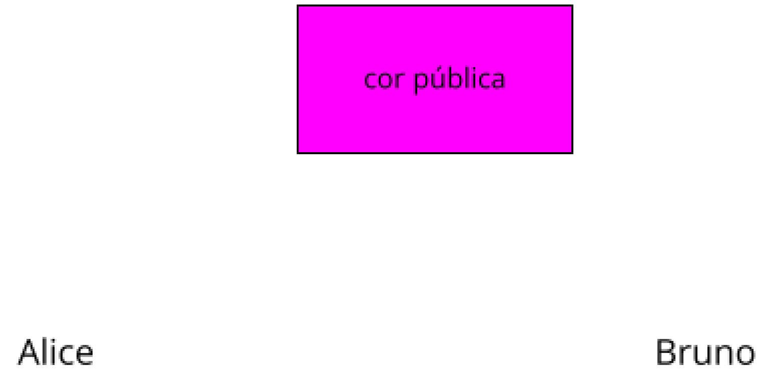
É fácil misturar duas tintas coloridas e formar uma nova cor.



Mas é muito difícil, quiçá impossível, saber quais tintas formam uma cor qualquer.

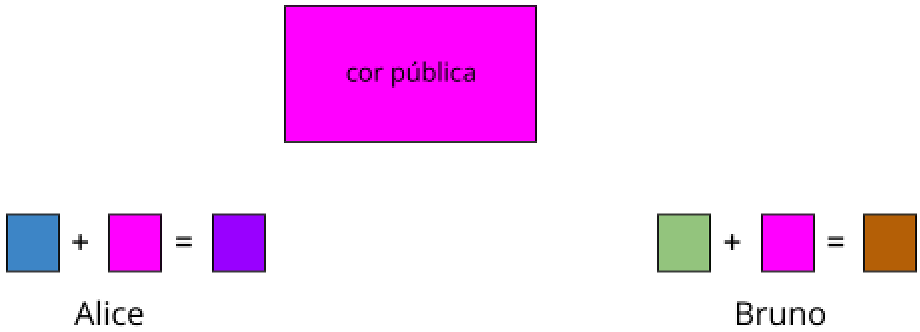


Usando essa ideia, a troca de chaves acontece da seguinte maneira. Suponha que Alice e Bruno querem estabelecer uma comunicação segura. Primeiro, eles escolhem uma cor pública, que todos podem ver.

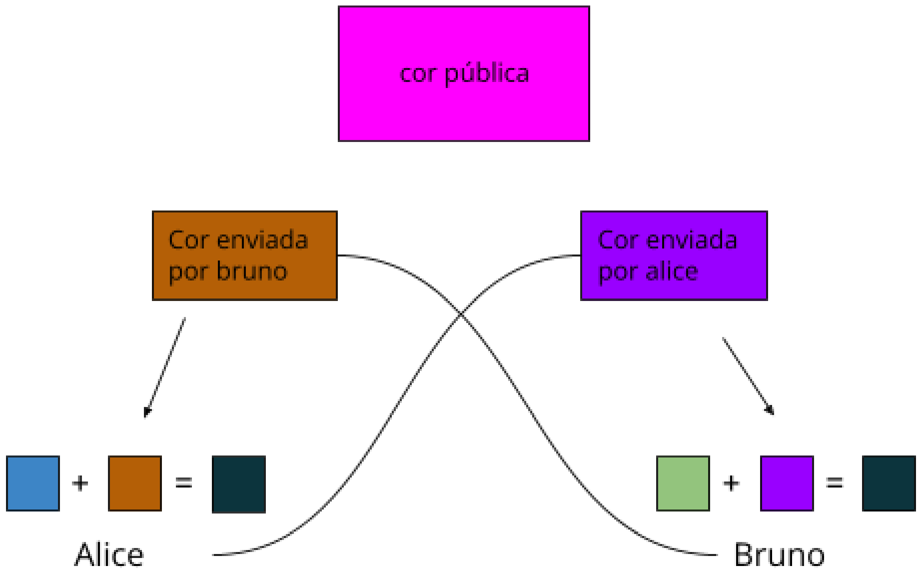


Em seguida, cada um escolhe uma cor secreta.

O próximo passo é cada um misturar sua cor secreta com a cor pública.



Essa mistura é enviada de um para o outro. Cada um mistura, então, a sua cor secreta com a cor que recebeu do outro.



Pronto! Tanto Alice quanto Bruno chegaram na mesma cor sem nunca divulgar ela, nem a sua cor secreta, para o mundo. Agora podem usar essa cor como chave para sua comunicação criptográfica.

Exercício 01.3

a) Explique porque as cores a que Alice e Bruno chegaram, ao final, são iguais.

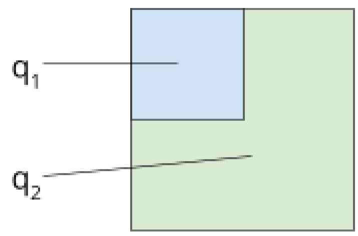
b) Suponha que existe um algoritmo que funciona como a analogia, mas usa números ao invés de cores. Quando, na analogia, as personagens misturam cores, esse algoritmo **soma** os números. Esse algoritmo é seguro? Ou seja, ele consegue esconder os "números secretos" de cada personagem? Explique qual a relação disso com a ideia de função de mão única.

Conclusão

Os conceitos apresentados aqui são uma introdução ao assunto da criptografia. Para uma introdução mais completa, faltou mencionar os conceitos de chaves simétricas e assimétricas, com o qual poderemos entender a criptografia de aplicativos como o *Whatsapp* e *Signal* e o protocolo PGP.

02 - Potências e raízes

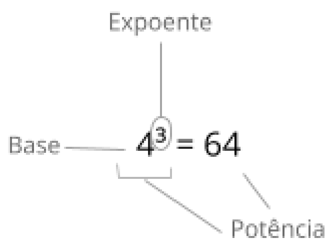
Observe o quadrado azul abaixo, de área 4, e o quadrado verde, cuja área é 4 vezes a área do quadrado azul:



As áreas desses quadrados formam uma sequência numérica em que cada termo é o termo anterior multiplicado por 4.

Quadrado	**Área**
q_1	4
q_2	16

Se continuarmos construindo quadrados seguindo esse padrão, o próximo quadrado, com 4 vezes a área de q_2, terá área $4 \cdot 4 \cdot 4$, ou então, 4^3.



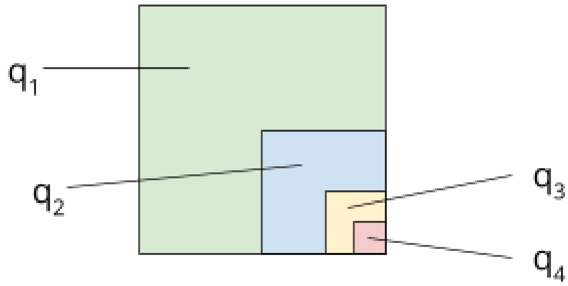
Observe que usamos o termo potência para designar tanto a expressão completa 4^3 quanto o resultado 64.

Quadrado	**Área**	**Área escrita na forma de potência**
q_1	4	4^1
q_2	16	4^2
q_3	64	4^3

De modo geral, sabemos que se n é um número natural maior do que 1 e a é um número qualquer, então

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

Observe agora uma sequência semelhante de quadrados, mas agora eles vão ficando menores:



As áreas dos quadrados formam uma sequência numérica em que cada termo é o termo anterior dividido por 4:

Quadrado	Área	Área escrita na forma de potência
q_1	4	4^1
q_2	1	4^0
q_3	$\frac{1}{4}$	4^{-1}
q_4	$\frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$	4^{-2}

De maneira geral, se a é um número não nulo e $-n$ é um expoente inteiro negativo, então temos que

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exercício 02.0 Calcule:

a) 1^4 **b)** 1^{-2} **c)** 1^0 **d)** 1^{101}

Exercício 02.1

a) Calcule três potências cujo expoente seja um número inteiro positivo. Em seguida, calcule três potências cujo expoente seja um número inteiro negativo.
b) As potências cujos expoentes são positivos tiveram resultado positivo ou

negativo?

c) As potências cujos expoentes são negativos tiveram resultado positivo ou negativo?

d) As potências cujas bases são positivas tiveram resultado positivo ou negativo?

e) As potências cujas bases são negativas tiveram resultado positivo ou negativo?

Exercício 02.3 Complete cada sequência com mais cinco termos:

a) 27, 9, 3, ... **b)** $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, ...$

Cálculos com potências podem resultar em números com muitos algarismos. Por isso, é comum deixar o resultado indicado na forma de potência. Por exemplo, em $(-3)^{21} \cdot (-3)^{15}$, cada fator é um número gigantesco!

$$(-3)^{21} \cdot (-3)^{15} = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot ... (-3)$$

O fator (-3) aparece *muitas* vezes na conta acima. Mas não precisamos escrever todas elas para saber *quantas* vezes ele aparece! Por causa do $(-3)^{21}$, ele aparece 21 vezes, e por causa do $(-3)^{15}$, ele aparece mais 15. No total, sabemos que existem (21 + 15) fatores (-3) na conta acima. Veja outro exemplo:

$$5^4 \cdot 5^3$$
$$= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5^3$$
$$= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$
$$= 5^7$$

Percebe-se que quando multiplicamos expoentes de mesma base, os expoentes podem ser somados. Esse raciocínio nos leva à propriedade geral:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exercício 02.4 Use raciocínio semelhante para verificar essas outras propriedades:

a) $a^m : a^n = a^{m-n}$ **b)** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ **c)** $(a^m)^n = a^{nm}$

Exercício 02.5 Se $a = (0,0001)^2$ e $a = (10^2)^3$, calcule:

a) $a \cdot b$ **b)** $\frac{a}{b}$ **c)** $\frac{b}{a}$

Exercício 02.6 Um *pen drive* tem capacidade para armazenar até 2 *gigabytes* de memória. Paula quer transferir para o *pen drive* alguns arquivos de 16 *megabytes* cada um. Sendo que

1 *megabyte* = 2^{10} *kilobytes* e
1 *gigabyte* = 2^{10} *megabytes,*

quantos arquivos de 16 *megabytes* podem ser armazenados nesse *pen drive*?

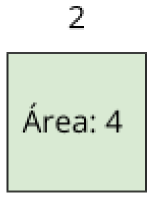
Exercício 02.7 A tabela abaixo mostra, em notação científica, a população aproximada dos estados da região Sul do brasil em agosto de 2000 e em agosto de 2010:

População aproximada dos estados da região Sul		
Estado	**Agosto de 2000**	**Agosto de 2010**
Paraná	$9,56 \cdot 10^6$	$1,04 \cdot 10^7$
Santa Catarina	$5,35 \cdot 10^6$	$6,25 \cdot 10^6$
Rio Grande do Sul	$1,02 \cdot 10^7$	$1,07 \cdot 10^7$

Considerando as informações da tabela, responda:

a) Qual era a população aproximada total da região Sul do Brasil em agosto de 2000?
b) E em agosto de 2010?
c) Qual foi o crescimento, em porcentagem, da população da região Sul de agosto de 2000 para agosto de 2010?

Lado e área do quadrado



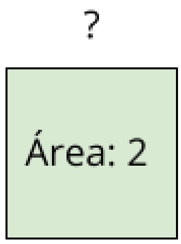
Imagine um quadrado q_1 de área 4, como visto anteriormente. Qual será o comprimento de seu lado? Sabemos que a área de um quadrado pode ser calculada multiplicando-se a medida de seu lado por ela mesma. É simples chegar na conclusão de que o lado do quadrado é 2, uma vez que $2 \cdot 2 = 4$.

É dessa propriedade dos quadrados, inclusive, que vem o fato de que dizemos que estamos "elevando ao quadrado" quando usamos a segunda potência. Aqui, no entanto, estamos fazendo uma pergunta um pouco diferente da que viemos fazendo até agora. Até agora, perguntávamos coisas do tipo: qual é a área do quadrado de lado 2? Para isso, lançávamos mão da potenciação e respondíamos: "a área do quadrado de lado 2 é 2^2. Agora, estamos fazendo a pergunta inversa: qual é o lado do quadrado de área 4? Ou seja, queremos saber que número que, quando elevado ao quadrado, resulta em quatro. A essa pergunta corresponde a operação da **radiciação**.

Exercício 02.8

a) Cite um número que elevado ao quadrado resulta em 9.
b) Cite um número que elevado ao quadrado resulta em 121.
c) Cite um número que elevado ao quadrado resulta em 0,25.
d) Cite um número que elevado ao cubo resulte em 27.

Exercício 02.9 Considere novamente a área dos quadrados. Suponha que temos agora um quadrado de área 2. Vamos responder a essa pergunta com estimativas. Primeiro, "chutamos" um número, por exemplo, o 1. Será que 1^2 resulta em 2? Como sabemos, $1^2 = 1$, então *a estimativa foi muito baixa*. Vamos tentar algo maior, então. Vamos estimar o número 1,5. Será que $1{,}5^2$ é igual a 2? Repita esse processo pelo menos quatro vezes. Registre todas as etapas.



Raízes

A **radiciação** é a operação inversa da potenciação. Por exemplo, $\sqrt[5]{16807} = 7$ (lê-se raiz quinta de 16807 é igual a 7), uma vez que $7^5 = 16807$.

Operações inversas

Já nos deparamos algumas vezes com operações inversas. São aquelas operações que “desfazem” umas às outras. Por exemplo, a soma e a subtração são operações inversas, já que se você somar 7, por exemplo, e depois subtrair 7, é o mesmo que não sair do lugar:

$$134 + 7 - 7 = 134$$

Outro exemplo é a multiplicação e a divisão:

$$134 \cdot 7 \div 7 = 134$$

Não seria diferente para a potenciação e a radiciação. Se você usar uma e depois a outra, com o mesmo número, você deve chegar ao seu ponto de partida!

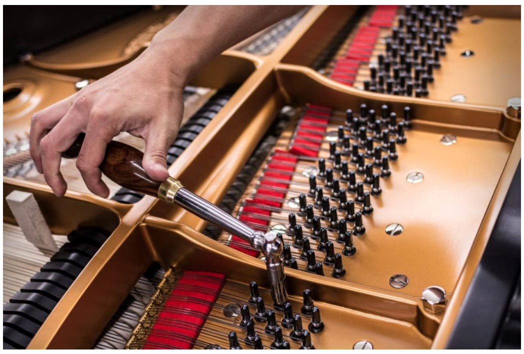
$$(\sqrt[5]{16807})^5 = 16807$$

Assim como:

$$\sqrt[5]{(16807)^5} = 16807$$

Em outras palavras, ainda, dizer que a raiz e**n**ésima de **x** é igual a **y** significa que **y** elevado ao expoente **n** resulta em **x**.

A raiz quadrada tem aplicações práticas. Em música, por exemplo, ao afinar um piano é necessário que a frequência de vibração de uma nota seja igual à frequência de afinação da nota anterior multiplicado pela raiz décima segunda de 2! Por exemplo, se a nota lá está afinada em 440 Hz[4], então a nota lá sustenido deve estar afinada em $440 \cdot \sqrt[12]{2}$ Hz. Para o afinador do piano, no entanto, essa conta tem que ser resolvida! Ele precisa saber em quantos Hertz deixar as cordas correspondentes ao lá sustenido. Para isso, é preciso **extrair** a raiz, usando uma calculadora ou fazendo tentativas para obter um valor aproximado, como fizemos no exercício 02.9. Extrair é

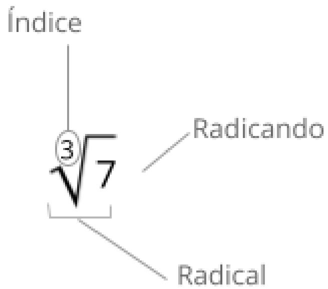


[4] Hertz (Hz) é uma medida de frequência.

"fazer a conta", ou seja, escrever o radical como um número decimal.

Há casos em que convém deixar o resultado na forma de um radical, exceto se o resultado da raiz for um número inteiro. Por esse motivo, você precisa aprender a efetuar alguns cálculos com radicais.

Para começar, vamos estabelecer a nomenclatura em torno dessa operação:



Exercício 02.10

a) Usando uma calculadora, complete a tabela:

Expressão	Resultado aproximado	Expressão	Resultado aproximado
$\sqrt{5}+\sqrt{2}$		$\sqrt{7}$	
$\sqrt{5}-\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$	
$\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$		$\sqrt{10}$	
$\sqrt{5}\div\sqrt{2}$		$\sqrt{2,5}$	
$\sqrt{11}+\sqrt{5}$		$\sqrt{16}$	
$\sqrt{11}-\sqrt{5}$		$\sqrt{6}$	
$\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}$		$\sqrt{55}$	
$\sqrt{11}\div\sqrt{5}$		$\sqrt{2,2}$	

b) Compare os resultados aproximados de cada linha. O que podemos concluir a partir dela?

Multiplicando radicais

Compare os resultados desses cálculos:

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{4}$$
$$= 3 \cdot 2$$
$$= 6$$

$$\sqrt{9 \cdot 4}$$
$$= \sqrt{36}$$
$$= 6$$

Esse exemplo nos faz perguntar: será que a raiz do produto de dois números é sempre igual ao produto de duas raízes? Ou seja, será que, para quaisquer números a e b positivos, vale a seguinte expressão?

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Exercício 02.11 Nesse exercício, vamos mostrar que a propriedade enunciada acima é verdadeira.

a) Existem dois números diferentes que, quando elevamos eles ao quadrado, chegamos ao mesmo número? Ou seja, existem números diferentes com o mesmo quadrado? Quando isso ocorre?
b) Complete a frase: "números ____________ com quadrados iguais são iguais"
c) Calcule $(\sqrt{a \cdot b})^2$, supondo que a e b são positivos[5].
d) Calcule $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$, supondo que a e b são positivos[6].
e) Conclua a propriedade enunciada, argumentando com base nos itens anteriores.

De acordo com essa propriedade, numa multiplicação de radicais, podemos começar extraindo cada uma das raízes (isto é, calculando-as) ou começar multiplicando os radicandos: tanto faz! Veja como a propriedade pode ser usada.

$$\sqrt{81} \cdot \sqrt{49} = \ ?$$

Aqui, é melhor começar extraindo as raízes

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \ ?$$

Aqui, convém começar multiplicando:

---

[5] Se não souber onde começar, veja o quadro "operações inversas", no início da seção "Raízes".
[6] Ver exercício 02.4.

$$= 9 \cdot 7$$
$$= 63$$

$$= \sqrt{2 \cdot 32}$$
$$= \sqrt{64} = 8$$

O mesmo vale para qualquer raíz: cúbica, quarta, etc. Por exemplo:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Além disso, na divisão, é válida uma ideia parecida:

$$\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}} = ?$$

Aqui convém começar dividindo

$$\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{250}{2}} = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$\sqrt{\frac{7}{16}} = ?$$

Aqui, a raiz de 7 fica indicada:

$$\sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Ou seja, chegamos a duas propriedades das raízes:

- Na multiplicação de radicais de mesmo índice, pode-se começar efetuando a multiplicação dos radicandos;
- Na divisão de radicais de mesmo índice, pode-se começar efetuando a divisão dos radicandos.

Uma possível confusão

Atenção! Cuidado para não confundir a multiplicação e a divisão na propriedade acima, com soma e subtração. Veja que $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ é totalmente diferente de $\sqrt{9 + 16}$. A propriedade só vale quando estamos fazendo “vezes” ou “dividido”.

Exercício 02.12 Calcule:

a) $\sqrt{81 \cdot 121} \cdot \sqrt[3]{10^3}$ **b)** $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$ **c)** $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2}$

d) $3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{48}$ **e)** $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$ **f)** $\sqrt[2]{243} : \sqrt[2]{3^3}$

g) $\sqrt[3]{8 \cdot 27} \cdot \sqrt{25}$ **h)** $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{3^2}}$

Exercício 02.13 No exercício 02.11, mostramos que a propriedade $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ é válida para raízes quadradas. Agora, mostre que também vale para as raízes cúbicas. Ou seja, prove que $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$.

Exercício 02.14 Você viu propriedades válidas para multiplicação e divisão de radicais, mas, nas questões seguintes, você deve pensar em adições e subtrações de radicais. Complete com $=$ ou $\neq$:

a) $\sqrt{100} + \sqrt{25}$ __________ $\sqrt{125}$
b) $\sqrt{100 + 4}$ __________ $10 + 2$
c) $\sqrt{100 \cdot 4}$ __________ $10 \cdot 2$
d) $\sqrt{5^2} + \sqrt{3^2}$ __________ $5 + 3$
e) $\sqrt{5^2 + 3^2}$ __________ $5 + 3$
f) $\sqrt{5^2 + 3^2}$ __________ $\sqrt{34}$
g) $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}}$ __________ $\frac{8}{2}$
h) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ __________ $\sqrt{\frac{a}{b}}$ (suponha que a não seja negativo e que b seja positivo)
i) $\sqrt{64} - \sqrt{4}$ __________ $\sqrt{60}$
j) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ __________ $\sqrt{a \cdot b}$ (suponha que a e b não sejam negativos)

Exercício 02.15 Nesse exercício, vamos investigar o que acontece quando elevamos um número a um expoente fracionário.

a) Resolva as seguintes adições de frações. Simplifique o resultado.

i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ **ii)** $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ **iii)** $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}$

b) Considere o número $16^{\frac{1}{2}}$ (dezesseis elevado a um meio). O que acontece quando multiplicamos ele por ele mesmo?

c) De acordo com a conclusão do item anterior, deve haver outro jeito de escrever o número $16^{\frac{1}{2}}$. Que jeito é esse?

d) Repita o procedimento dos itens b) e c) para os números $9^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{1}{2}}$ e $8^{\frac{1}{3}}$.

e) Generalize o que você descobriu até agora. Ou seja, com calcular o número $a^{\frac{1}{n}}$, com a não negativo? Justifique.

Exercício 02.16 O objetivo desse exercício é expandir ainda mais o significado dos expoentes fracionários. Você deve descobrir como calcular números como $25^{\frac{3}{2}}$, $27^{\frac{2}{3}}$, $4^{\frac{5}{2}}$, ou então, como reescrevê-los em forma de radical[7]. Registre todas as etapas da investigação. Se possível, ao final, conclua com a seguinte generalização: como calcular o número $a^{\frac{m}{n}}$, com a não negativo?

Cálculo com radicais

Há situações em que não extraímos as raízes quadradas, cúbicas, etc. Por que não fazer a extração? É um processo trabalhoso e o resultado costuma ser um número com muitas casas decimais. Por exemplo, $\sqrt{2} = 1,4142135$... Usando essa representação decimal, nunca vamos conseguir um número exato, vamos sempre precisar dos "três pontinhos". O procedimento de extração é interminável.

Isso quer dizer que, na maioria das vezes, vamos ficar trabalhando com raízes sem "fazer as contas". Em outras palavras, se chegarmos a um resultado $\sqrt{7}$, o trabalho está feito! Não precisamos pegar a calculadora ou usar o método das tentativas para *extrair* a raiz de sete.

Um paralelo com as frações

Esse jeito de lidar com os radicais, considerando que não precisamos extraí-los, tem semelhança com o jeito com que lidamos com as frações. De certa forma, as frações também são "contas": $\frac{3}{2}$ nada mais é do que o número 3 dividido por 2. Assim como nos radicais, podemos

[7] Dica: você não vai saber fazer a conta diretamente, mas sabe manipular esses números usando as propriedades da potenciação (rever exercício 02.4). Use isso a seu favor para descobrir quem são esses caras!

“fazer a conta”, ou seja, reescrever a fração $\frac{3}{2}$ em sua forma decimal $1,5$. No entanto, nem sempre é vantajoso fazer isso, principalmente se a forma decimal tiver infinitas casas decimais.

O que se passa é que começamos a considerar as frações e os radicais como números, muito mais do que como contas a serem feitas. Quando nos depararmos com $\sqrt{2}$, vamos pensar: “é um número, ali entre o 1 e o 2”, ao invés de pensar “que cálculos preciso fazer para descobrir que número é esse?”

Outra similaridade, que vamos ver a seguir, é o fato de que, para usar a forma fracionária de um número eficientemente, é preciso geralmente simplificá-la. Por exemplo, a fração $\frac{10}{6}$ pode ser simplificada para $\frac{5}{3}$. Ou seja, estamos reescrevendo a fração como uma outra, que é equivalente. Em seguida, vamos fazer algo similar com as raízes.

Exercício 02.17 Nesse exercício, vamos investigar como é possível simplificar radicais. Vamos usar como exemplo o número $\sqrt{18}$.

a) Decomponha o número 18 em seus fatores primos.[8]
b) Reescreva o número $\sqrt{18}$ usando essa decomposição (ou seja, onde aparece o número 18, substitua pela decomposição em fatores primos do 18).
c) Depois do item b), você tem uma raiz quadrada com uma conta de multiplicação do lado de dentro. Passe essa conta de multiplicação para fora da raíz. Ou seja, reescreva o radical como uma multiplicação de radicais.
d) Veja se você consegue eliminar alguma raiz.

Exercício 02.18 Repita o mesmo procedimento do exercício 02.17 para os seguintes números:

a) $\sqrt{3 \cdot 5^2}$	**b)** $\sqrt{12}$	**c)** $\sqrt{75}$	**d)** $\sqrt[3]{7^3 \cdot 2}$
e) $\sqrt[3]{40}$	**f)** $\sqrt[3]{189}$	**g)** $\sqrt{242}$	**h)** $\sqrt[3]{81}$

[8] Lembrando: decompor em fatores primos é reescrever o número como uma multiplicação de números primos. Por exemplo, a decomposição em fatores primos do número 200 é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, ou então $2^3 \cdot 5^2$

Exercício 02.19 Nesse exercício, vamos ver o que acontece quando somamos raízes de mesmo radicando. Recorde o que acontece quando somamos variáveis:

$$x + x = 2x$$
$$2a + 3a = 5a$$
$$3m + 2n + 5m - 4n = 8m - 2n$$

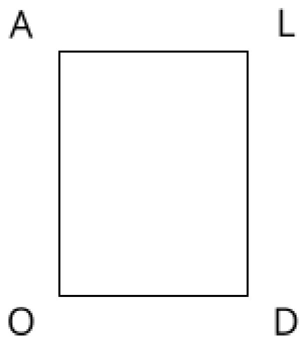
Algo semelhante vai se passar com os radicais. Simplifique:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{11} + \sqrt{11}$
c) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ **d)** $3\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 5\sqrt{5} - 4\sqrt{7}$

Exercício 02.20 Agora, para realizar a soma dos radicais, você terá que simplificá-los antes. Aproveite algumas simplificações já feitas no exercício 02.18.

a) $\sqrt{3 \cdot 5^2} + \sqrt{3 \cdot 7^2}$ **b)** $\sqrt{27} + \sqrt{75}$
c) $4\sqrt{27} - 2\sqrt{75}$ **d)** $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24}$
e) $2\sqrt{20} - \sqrt{80}$ **f)** $\sqrt{\frac{7}{25}} + \sqrt{343}$

Exercício 02.21 O perímetro do retângulo abaixo mede $4 + 6\sqrt{3}$. O lado AO mede $2 + \sqrt{12}$. Calcule a medida do lado AL e a área do retângulo.



Exercício 02.22 O tempo aproximado, em segundo, que uma pedra leva para cair de uma altura a, em metro, é dado pela fórmula $t = \frac{\sqrt{5a}}{5}$.
Determine a altura a se o tempo da queda for:

a) 3 s **b)** 5s

03 - Conjuntos

Quando arrumamos o armário, geralmente, reservamos uma gaveta para blusas, um espaço para calças, uma gaveta para meias, e assim por diante. Quando fazemos isso estamos **classificando** as roupas de acordo com alguma característica delas, formando o **conjunto** das blusas, o conjunto das calças, o conjunto das meias... Classificar é distribuir algum tipo de ser ou objeto (roupas, animais, alunos, números, figuras geométricas, etc) em classes, conjuntos ou grupos[9], por meio de algum **critério**. Outro exemplo de classificação é separar o conjunto dos números naturais em *pares* e *ímpares*. Nesse exemplo, o critério é ser par ou ímpar. A classificação também é muito comum em geometria: quando distinguimos as figuras planas poligonais das não poligonais, estamos gerando os conjuntos dos polígonos e o conjunto dos não polígonos, etc.

Pertencimento

O conceito mais elementar que nos permite falar de conjuntos é o conceito de pertencimento. Um conjunto fica definido quando descrevemos quem são os elementos que pertencem a ele, e, consequentemente, quais elementos não lhe pertencem. Considere, por exemplo, o conjunto dos cooperados da Arco.

Dizemos que o Enzo **pertence** ao conjunto dos cooperados da Arco. Igualmente, Danilo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco. Não se pode dizer o mesmo de Jair Bolsonaro ou de Sócrates: Jair Bolsonaro não

[9] Nesse contexto, classe, conjunto, grupo, família e coleção são sinônimos.

pertence ao conjunto de cooperados da Arco, nem Sócrates[10]. Quando algo pertence a um conjunto, dizemos que esse algo **é elemento** desse conjunto. Assim, poderíamos equivalentemente dizer que Enzo é elemento do conjunto dos cooperados da Arco.

Finalmente, vamos introduzir uma *notação* (ou seja, um jeito de escrever que significa a mesma coisa) para falar de pertencimento. Vamos usar o símbolo ∈. Seja A o conjunto dos cooperados da arco e E o cooperado Enzo. Então:

sinônimos

$E \in A$
Enzo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco
Enzo é elemento do conjunto dos cooperados da Arco

Igualdade

Dizemos que dois conjuntos são **iguais** (ou então, que são o mesmo) se e somente se seus elementos forem os mesmos. Ou seja, o conjunto A é igual ao conjunto B se e somente se[11] todo elemento de A for também elemento de B, e se todo elemento de B for também elemento de A. Em outras palavras, o que define um conjunto são os elementos que lhe pertencem.

Tamanho de conjuntos

O **tamanho** ou **cardinalidade** de um conjunto é o número de elementos distintos que aparecem dentro dele. Seja A o conjunto dos alunos do 9º ano da arco em 2022. Então o tamanho[12] de A é 22. Outro exemplo é o conjunto dos brasileiros, cujo tamanho é de mais ou menos 211 milhões.

Alguns conjuntos têm tamanho infinito. Ou seja, não existe nenhum número natural que consiga representar o tamanho daquele conjunto[13]. Um exemplo de conjunto de cardinalidade infinita é o conjunto dos números naturais.

[10] Note que, uma vez que definimos um conjunto a partir de um critério, então dizer que um elemento pertence a um conjunto é a mesma coisa que dizer que esse elemento satisfaz esse critério. Em um exemplo, dizer que "Enzo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco" é o mesmo que dizer que "Enzo é um cooperado".
[11] Essa afirmação também é conhecida como "princípio de extensionalidade".
[12] Essa afirmação também pode ser escrita assim: $|A| = 22$
[13] Mais precisamente, dizemos que a cardinalidade de um conjunto A é infinita quando, para cada número natural *n*, existe um subconjunto de A de cardinalidade *n*.

Descrevendo conjuntos

Já sabemos que o que define um conjunto são os seus elementos. Vamos introduzir agora uma notação para **descrever** conjuntos. É um tanto simples: vamos usar um par de chaves ("{" e "}") para indicar que trata-se de um conjunto e, dentro delas, listar seus elementos, separados por vírgulas[14]. Veja:

Conjunto dos professores de matemática da Arco: {Bigode, Enzo, Seckler}
Conjunto dos professores de música da Arco: {Leo}
Conjunto dos professores de Educação Moral e Cívica da Arco: {}

Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$): {0, 1, 2, 3, 4, ...}
Conjunto dos número naturais menores que 3: {0, 1, 2}
Conjunto dos números naturais menores que 10 e maiores que 5: {6, 7, 8, 9}
Conjunto dos números naturais menores que 10 e maiores que 20: {}

Lembre-se que dois conjuntos são iguais se seus elementos forem os mesmos. Então temos que

{Bigode, Enzo, Seckler} = {Seckler, Bigode, Enzo}

ou então, esses dois conjuntos são *o mesmo*. Isso quer dizer que a ordem em que os elementos aparecem dentro das chaves não importa.

Deve parecer estranho especificar o conjunto dos professores de Educação Moral e Cívica na Arco, já que essa disciplina não é oferecida na escola, portanto *não há professores que satisfaçam esse critério*. O conjunto resultante não poderá conter nenhum elemento! Logo, o conjunto especificado é o **conjunto vazio**, denotado simplesmente por {} ou por $\emptyset$. Analogamente, note que não existe nenhum número que seja menor do que 10 e que seja maior do que 20. Logo, o conjunto especificado por esse critério deve também ser o conjunto vazio.

Exercício 03.0 Reflita sobre o processo de classificação no seu cotidiano. Dê dois exemplos de situações no dia a dia (sem ser na aula de matemática e sem repetir o exemplo do armário do início da atividade) em

---

[14] Algumas vezes vamos usar o ponto e vírgula (;) para separar os elementos, para não confundir com a vírgula que separa a parte inteira das casas decimais.

que você classificou alguma coisa. Nos dois exemplos, descreva o critério utilizado e os conjuntos resultantes dessa classificação.

Exercício 03.1

a) Descreva o conjunto dos professores de artes da Arco;
b) Descreva o conjunto dos professores de Etiqueta da Arco;
c) Descreva o conjunto dos números naturais n que satisfaça $n < 6$.
d) Descreva o conjunto dos números naturais n que satisfaça $n > 5$.
e) Descreva o conjunto dos números naturais n que satisfaça $n \leq 4$.

Exercício 03.2 Para todas as respostas do exercício 2, diga qual é a cardinalidade do conjunto que você descreveu.

Exercício 03.3 Considere o conjunto A de todos o números naturais pares e o conjunto B de todos os números naturais múltiplos de 2. É correto dizer que $A = B$? Justifique, considerando a definição de igualdade apresentada acima.

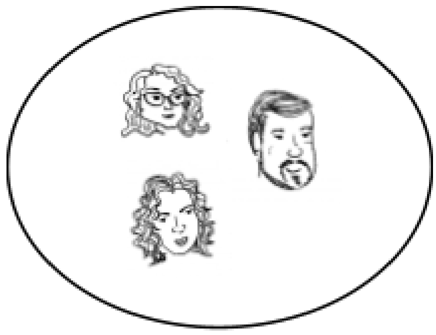
Exercício 03.4[15] Seja B um conjunto qualquer. Considere o conjunto $A_1 = \{B, B\}$. Qual é a cardinalidade de A_1? Considere também o conjunto $A_2 = \{B, B, B\}$ e $A_3 = \{B, B, B, B\}$. Qual é a diferença entre A_1, A_2e A_3? Justifique, considerando a definição de cardinalidade apresentada acima.

Inclusão

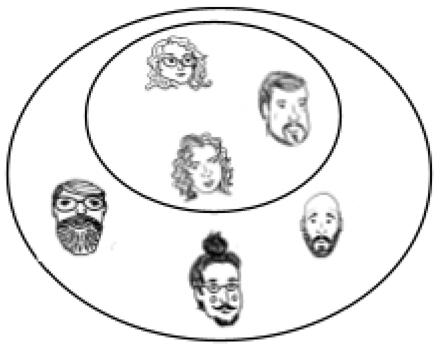
Informalmente, dizemos que um conjunto é subconjunto de outro quando o primeiro "faz parte" do segundo. Por exemplo, considere o *conjunto de professores de humanas* da Arco e o *conjunto de professores de história* da Arco. O segundo conjunto "faz parte" do primeiro, afinal, a história é uma disciplina de humanas.

[15] Dica: releia a seção "igualdade"

professores de humanas



Professores de história



professores de história são um **subconjunto** dos professores de humanas

Note que todos os elementos do conjunto dos professores de história também são elementos do conjunto dos professores de humanas. É isso que quer dizer "fazer parte"!

Dizemos que um conjunto A é **subconjunto**[16] de um conjunto B se todo elemento de A for também elemento de B. Para representar essa ideia, vamos usar a seguinte notação: $A \subseteq B$.

Exercício 03.5 Descreva outros dois casos do dia a dia em que um conjunto é subconjunto de outro.

Exercício 03.6 Considere que o conjunto E é o conjunto dos estados do Brasil. Ou seja, $E = \{AC,\ AL,\ AP, AM, BA, ...\}$.

a) Descreva o conjunto SE, o conjunto dos estados da região sudoeste do Brasil.
b) É verdade que $SE \subseteq E$?
c) É verdade que $SE \in E$?

[16] Também podemos dizer que o conjunto A está **incluído** no conjunto B.

d) É verdade que $MG \subseteq E$?
e) É verdade que $MG \in E$?
f) Forneça outros dois subconjuntos de E.

Exercício 03.7 Considere as seguintes definições, no contexto da geometria plana:

- A é o conjunto dos polígonos;
- T é o conjunto dos triângulos;
- b é um ponto;
- F é o conjunto das figuras geométricas;
- q é um quadrado;
- R é o conjunto dos retângulos;
- L é o conjunto dos losangos;
- c é um quadrilátero
- d é uma reta;
- P é o conjunto de todos os pontos;

Descreva no mínimo seis relações de pertencimento ou de inclusão entre os objetos acima.

Exercício 03.8[17] Considerando os seguintes conjuntos,

$A = \{1\}$
$B = \{1, \{1\}\}$
$C = \{1, 2\}$
$D = \{1, 2, \{1\}\}$
$E = \{1, \{1, \{1\}\}\}$

determine quais das sentenças abaixo são verdadeiras:

i) $A \in B$
ii) $A \subseteq B$
iii) $B \in E$
iv) $B \subseteq E$
v) $C \in D$
vi) $C \subseteq D$
vii) $B \subseteq D$

[17] Desafio: Construa um conjunto A, diferente do conjunto vazio, tal que todo elemento de A é subconjunto de A. Dê dois exemplos.

Conjuntos de múltiplos

Considere os conjuntos formados por múltiplos de números naturais. Por exemplo, o conjunto dos múltiplos de 3. Vamos chamá-lo de $M(3)$. Assim,

$$M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$$

Em geral, $M(n)$ é o conjunto dos múltiplos de um número natural n. Veja outro exemplo:

$$M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, \ldots\}$$

Exercício 03.9

a) Existe algum número que é elemento de todos os conjuntos dos múltiplos? Ou seja, existe algum número z tal que pertence a $M(n)$, qualquer que seja n?

b) Encontre um conjunto de múltiplos que seja subconjunto de outro conjunto de múltiplos. Ou seja, encontre m e n tais que $M(m) \subseteq M(n)$.

c) No item anterior, qual é a relação entre m e n?

Exercício 03.10

a) Mostre que a soma de dois elementos de um conjunto de múltiplos resulta num número que também faz parte daquele conjunto de múltiplos. Ou seja, mostre que se $a, b \in M(n)$, então $a + b \in M(n)$, para todo n.

b) Mostre que se $a \in M(n)$ e k é um número natural, então $a \cdot k \in M(n)$, para todo n.

União

Podemos criar novos conjuntos a partir de conjuntos dados de diversas maneiras. Por exemplo, "juntando" dois deles. A **união** de dois conjuntos A e B é o conjunto que contém todos os elementos que pertencem a A ou que pertencem a B. Usaremos a seguinte notação para indicar a união de A e B:

$$A \cup B$$

Veja um exemplo: seja A o conjunto dos estudantes da Arco, EF o conjunto dos estudante do Ensino Fundamental II da Arco, e EM o conjunto dos estudantes do Ensino Médio da Arco. Então:

$$A = EM \cup EF$$

Seja também EM_1 o conjunto dos estudantes da 1ª série o médio, EM_2 da 2ª série, e assim por diante. Então:

$$EM = EM_1 \cup EM_2 \cup EM_3$$

$$EF = EF_6 \cup EF_7 \cup EF_8 \cup EF_9$$

Intersecção

Ao invés de "juntar" dois conjuntos, podemos também "pegar o que eles têm em comum". A **intersecção** entre dois conjuntos A e B é o conjunto que contém os elementos que são elementos tanto de A quanto de B. Usaremos a seguinte notação para denominá-lo:

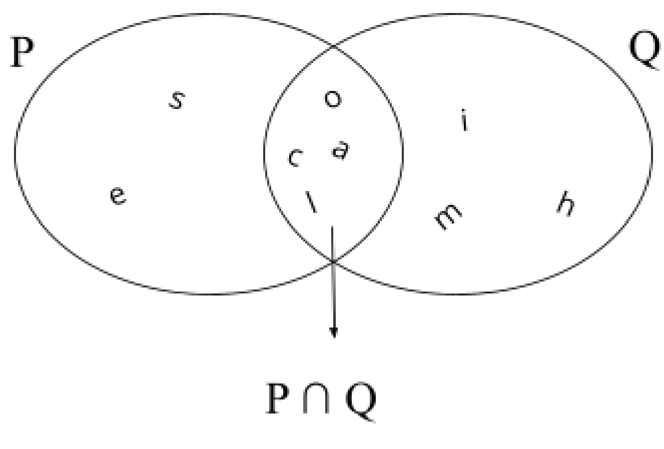
$$A \cap B$$

Veja um exemplo: considere que P é o conjunto das letras que aparecem na palavra **escola** e que Q é o conjunto das letras que aparecem na palavra **mochila**. Ou seja:

$$P = \{e,\ s,\ c,\ o,\ l,\ a\} \qquad \text{e} \qquad Q = \{m,\ o,\ c,\ h,\ i,\ l,\ a\}$$

A intersecção desses dois conjuntos, $P \cap Q$, vai ser o conjunto das letras que as duas palavras têm em comum.

$$P \cap Q = \{c,\ o,\ l,\ a\}$$



Exercício 03.11 Nos itens abaixo, considere que $P = \{e,\ s,\ c,\ o,\ l,\ a\}$, $Q = \{m,\ o,\ c,\ h,\ i,\ l,\ a\}$, que V é o conjunto das vogais — ou seja, $V = \{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$ — e que C é o conjunto das consoantes — ou seja, $C = \{b,\ c,\ d,\ f,\ g,\ h,\ j,\ k,\ l,\ ...\}$. Descreva os conjuntos abaixo.

a) $P \cup Q$ **b)** $P \cap Q$ **c)** $P \cup V$ **d)** $P \cup C$
e) $P \cap V$ **f)** $P \cap C$ **g)** $Q \cap V$ **h)** $Q \cap C$

Exercício 03.12 Descreva os conjuntos:

a) $M(2) \cup M(4)$ **b)** $M(2) \cap M(4)$ **c)** $M(2) \cup M(3)$
d) $M(2) \cap M(3)$ **e)** $M(3) \cup M(9)$ **f)** $M(3) \cap M(9)$

O conjunto dos números naturais

O conjunto dos números naturais é o mais simples entre os que nos interessam aqui. Através de seus elementos, as crianças têm seus primeiros contatos com a matemática, e foram os primeiros a aparecerem na história da humanidade. Também são conhecidos como *números para contar*: um, dois, três, quatro... Os matemáticos acrescentaram o número 0 e o denominaram conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Exercício 03.13 Dê dois exemplos de subconjuntos de $\mathbb{N}$ com 6 elementos que satisfaçam simultaneamente às seguintes condições:

i) Todos maiores que 100 e menores que 200;
ii) Não podem ser múltiplos de 5;
iii) Dois elementos quaisquer não podem satisfazer à equação $x + y = 300$

Exercício 03.14 Aponte um subconjunto de cardinalidade infinita em que qualquer elemento, com exceção do menor de todos, pode ser obtido a partir da soma de outro elemento com 3.

Exercício 03.15 Um conjunto se diz **fechado** em relação à adição se, somando quaisquer dois elementos desse conjunto, o resultado também perteapost5nce a esse conjunto. De forma análoga, o mesmo se diz sobre um conjunto ser fechado em relação à multiplicação.

Em outras palavras, um conjunto A é fechado em relação à adição se e somente se, para todo $x, y \in A$, for verdade que $x + y \in A$.

a) O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado em relação à adição? E em relação à multiplicação?
b) Forneça um subconjunto de $\mathbb{N}$ que seja fechado em relação à adição.
c) Forneça um subconjunto de $\mathbb{N}$ que seja fechado em relação à multiplicação.
d) Forneça um subconjunto de $\mathbb{N}$ que não seja fechado em relação à adição nem à multiplicação.
e) Existe algum subconjunto de $\mathbb{N}$ de cardinalidade finita fechado em relação à adição? Se sim, forneça-o.
f) Existe algum subconjunto de $\mathbb{N}$ de cardinalidade finita fechado em relação à multiplicação? Se sim, forneça-o.
g) O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado em relação à subtração?
h) Encontre alguma operação que não seja a adição, multiplicação e subtração em relação à qual o conjunto dos naturais *não* seja fechado.
i) Encontre alguma operação que não seja a adição, multiplicação e subtração em relação à qual o conjunto dos naturais seja fechado.

Exercício 03.16 Dizemos que um elemento de um conjunto é **neutro** em relação a uma operação quando fazer essa operação entre ele e qualquer outro elemento do conjunto nos dá esse outro elemento mesmo. Ou seja, fazer a operação com esse elemento é a mesma coisa que não fazer nada.

Por exemplo, o elemento neutro da adição é o 0. Isso porque qualquer número mais zero é igual a ele mesmo.

a) Qual é o elemento neutro da multiplicação?
b) E o da divisão?
c) E o da subtração?

O conjunto dos números inteiros

Juntando os elementos do conjunto dos números naturais com seus opostos[18], obtemos um novo conjunto: o dos números inteiros.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0\} \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

O símbolo comumente utilizado para identificar os números inteiros é o Z maiúsculo, inicial da palavra *Zahl*, que em alemão significa “número”.

Exercício 03.17

a) Qual a cardinalidade de $\mathbb{Z}$?
b) Dê três exemplos de subconjuntos infinitos de $\mathbb{Z}$.
c) Quantos subconjuntos tem o conjunto $\mathbb{Z}$?
d) Decida se a seguinte proposição é verdadeira: “existe um elemento em $\mathbb{Z}$ que é menor que qualquer outro número”
e) Faça o mesmo para essa: “existe um elemento em $\mathbb{N}$ que é menor que qualquer outro número”

Exercício 03.18 Verifique se $\mathbb{Z}$ é fechado para cada uma das 4 principais operações (soma, subtração, multiplicação e divisão).

Exercício 03.19

a) Forneça um subconjunto de $\mathbb{Z}$ fechado em relação à adição.
b) Forneça um subconjunto de $\mathbb{Z}$ fechado em relação à subtração.
c) Forneça um subconjunto de $\mathbb{Z}$ fechado em relação à multiplicação.
d) Forneça um subconjunto de $\mathbb{Z}$ fechado em relação à divisão.

Equações em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Z}$

A solução de uma equação pode ter resultados diferentes, dependendo do conjunto com que estamos trabalhando. Considere a equação $x + 2 = 4$,

[18] Dizemos que um número *a* é **oposto** a *b* se a = -b

para $x \in \mathbb{N}$. Ela tem solução, já que $x = 2$ é um elemento de $\mathbb{N}$. Nesse caso, dizemos que trata-se de uma **solução em** $\mathbb{N}$.

A equação $x + 2 = 4$, para $x \in \mathbb{Z}$ também tem solução, pois 2 também é um número inteiro.

Considere agora a equação $x + 2 = 1$, com $x \in \mathbb{N}$. Essa equação não tem solução, já que não existe nenhum número natural que a satisfaça (verifique). Se, no entanto, considerarmos $x \in \mathbb{Z}$, então a equação tem solução: $x =- 1$.

Você deve se lembrar que a solução de uma equação é um valor para a variável que torna a expressão verdadeira[19]. Sabemos também que algumas equações têm mais de uma solução, ou mesmo infinitas. A partir de agora, ao resolver equações, vamos usar a ideia de **conjunto solução**. Trata-se do conjunto de todas as soluções de uma equação. Por exemplo, o conjunto solução da equação $2x + 4 = 8$ é o $\{2\}$, já que o 2 é a única solução dessa equação. Outro exemplo: o conjunto solução da equação $x^2 = 4$ é $\{2, \ - 2\}$, já que tanto 2 quanto o $-\ 2$ são soluções para ela. Ao apresentar uma resolução de equação, podemos tanto escrever que a variável pertence ao conjunto solução ($x \in \{2, - 2\}$), quanto usar o nome genérico S para o conjunto solução ($S = \{2, \ - 2\}$). Veja ao lado.

$x^2 = 4$

$x \in \{2, -2\}$

ou

$S = \{2, -2\}$

Exercício 03.20 Indique quais são as soluções das equações abaixo, considerando que $x \in \mathbb{N}$.

a) $2x - 4 = 0$
b) $3x - 1 = 4$
c) $2x + 1 = 5$
d) $2x - 1 = 1$
e) $x + 5 = 4$
f) $2x + 1 = 0$
g) $x^2 - 9 = 0$
h) $(x - 4)^2 = 25$
i) $(- 6 + x)^2 - 9 = 0$

[19] Se a equação tiver mais de uma variável, então a solução é uma combinação de valores para essas variáveis.

k) $2x^2 - 4x = 0$
j) $x^2 + 10x + 25 = 16$

Exercício 03.21 Faça o mesmo que o exercício anterior, mas agora considere que $x \in \mathbb{Z}$.

Definindo conjuntos por compreensão

Até agora definimos conjuntos de dois modos. Ou usamos o português, por exemplo: "O conjunto dos números naturais pares", ou então usamos a notação com chaves, exemplo: $\{0, 2, 4, 8, 10, ...\}$. O problema do primeiro é que não é enxuto. O segundo sofre de falta de precisão em se tratando de conjuntos de cardinalidade infinita: nem sempre é claro o que querem dizer as reticências.

Vamos introduzir uma nova notação que representa conjuntos por **compreensão**. Vamos usar as mesmas chaves, mas ao invés de listar os elementos, vamos descrevê-los através de uma propriedade. Por exemplo, considere que B é o conjunto de números inteiros menores que 5. Podemos representar B da seguinte maneira:

$\{x \in \mathbb{Z}: x < 5\}$

Se quisermos representar o conjunto dos naturais maiores ou iguais a 6, poderemos dizer:

$\{x \in \mathbb{N}: x \geq 6\}$

Outro exemplo é o conjunto dos cooperados da Arco. Poderíamos representá-lo assim:

$\{c: c \text{ é } cooperado\ da\ arco\}$

Podemos ler os dois pontos (:)[20] como "tais que". Assim, o conjunto acima poderia ser lido da seguinte forma: "O conjunto dos números naturais *x* tais que *x* é maior ou igual a 6". Veja como poderíamos descrever o conjunto dos números inteiros pares:

$\{x \in \mathbb{Z}:\ existe\ k \in \mathbb{Z}\ tal\ que\ 2k = x\}$

[20] É comum também usar uma barra vertical (|) ao invés dos dois pontos. Ambos têm o mesmo significado.

Exercício 03.22

a) Represente o conjunto dos números naturais menores que 5 de três jeitos diferentes.
b) Represente por compreensão o conjunto dos números inteiros menores que 100.
c) Represente por compreensão o conjunto dos países da américa do sul
d) Represente por compreensão o conjunto *{tipuana, seringueira, resedá, pau-brasil, ...}*
e) Represente por compreensão o conjunto dos números quadrados (isto é, números naturais que podem ser escritos como um outro número natural ao quadrado)
f) Represente por compreensão o conjunto dos números naturais ímpares.
g) Represente por compreensão o seguinte conjunto:

> { a : a é triângulo } ∪ { a : a é quadrado } ∪ { a : a é pentágono } ∪
> { a : a é hexágono } ∪ { a : a é heptágono } ∪ ...

Exercício 03.23 Seja A um conjunto. Seja B outro conjunto dado por $B = \{i \in A: i \neq i\}$.

> **a)** Quantos elementos tem o conjunto B?
> **b)** Forneça outra representação por compreensão para B.

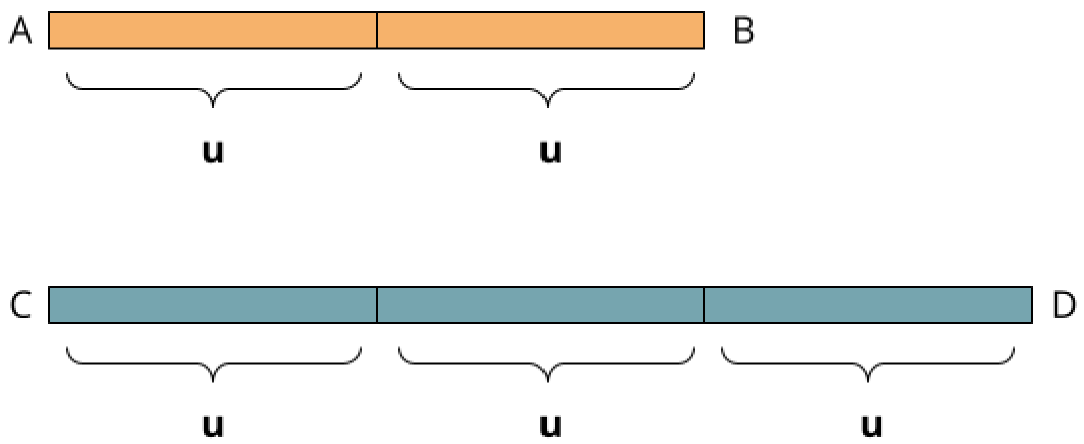
O conjunto dos números racionais

Depois de ter criado os números e desenvolvido vários sistemas de contagem e numeração, o homem deparou com um problema que não podia ser resolvido com os número de que dispunha. O problema da **medida**. Abaixo, vemos uma passagem de Heródoto, um historiador grego que viveu no século V a.C.

> *Disseram-me que este rei [Sesóstris] tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Se a porção de algum fosse diminuída pelo rio [Nilo], ele que fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra, que ao mesmo tempo o rei enviaria medidores ao local e faria medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e*

de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado em terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos gregos.

Se a geometria nasceu como sugere Heródoto, é possível que as frações também tenham surgido do problema da medida. Veja: um segmento AB pode ser medido com a unidade **u**.



Mas como medir um segmento PQ muito longo ou muito curto, tendo **u** como unidade? Problemas desse tipo levaram ao surgimento dos números **racionais**.

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais inclui todos os números inteiros e mais os números representados por frações (positivas e negativas). Em outras palavras, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é formado por todos os números que podem ser colocados na forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}: a, b \in \mathbb{Z}\, e\, b \neq 0\}$$

Exercício 03.24 Verifique se $\mathbb{Q}$ é fechado para cada uma das 4 principais operações (soma, subtração, multiplicação e divisão).

Exercício 03.25 Verifique se $\mathbb{Q}$ é fechado em relação à potenciação e à radiciação. Ou seja, verifique se um número racional qualquer elevado a outro racional qualquer é sempre um número racional. Em seguida, verifique se a raiz *r*-ésima de um número racional qualquer, sendo *r* um racional qualquer, é também um racional.

Exercício 03.26 Compare os números racionais abaixo, usando os sinais de $<$, $>$, ou $=$.

a) $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$

c) $\frac{8}{9}$ e $\frac{7}{8}$

d) $\frac{5}{100}$ e $\frac{4}{99}$

e) $\frac{87}{91}$ e $\frac{82}{86}$

f) $\frac{(a+1)}{15}$ e $\frac{a}{14}$

a) $\frac{998}{999}$ e $\frac{98}{99}$

Exercício 03.27 Volte ao exercício **03.18** e indique quais equações têm soluções racionais mas que não são inteiras.

Exercício 03.28 Forneça a representação decimal das frações abaixo.

a) $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{7}{10}$ **d)** $\frac{2}{10}$ **e)** $\frac{-3}{2}$ **f)** $\frac{26}{65}$

g) $\frac{16}{40}$ **h)** $\frac{5}{2}$ **i)** $\frac{-13}{5}$ **j)** $\frac{3}{9}$ **k)** $\frac{-2}{3}$

Exercício 03.29 Solucione as equações abaixo, considerando que $x, y \in \mathbb{Q}$.

a) $x + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$

b) $y + \frac{14}{9} = \frac{5}{3}$

c) $x - \frac{6}{5} = \frac{-3}{10}$

d) $0,45x + 3 = 14,25$

e) $\frac{3}{4}x + 2 = \frac{5}{2}$

f) $\frac{81}{180}y + 3 = \frac{57}{4}$

Números irracionais

Primeiro, vimos os números naturais, os mais elementares, usados para contar. A eles acrescentamos os números negativos, formando o conjunto dos números inteiros. Esse passo tem a ver com a possibilidade de subtrair quaisquer dois números. Depois passamos a falar nos “números quebrados”, ou melhor, os números que podem ser escritos como a divisão de dois números inteiros. Isso tem a ver com a possibilidade de dividir quaisquer dois números. Será que existem números que não pertencem a nenhum dos conjuntos acima?

Se você leu o título da seção, deve imaginar que sim. E um dos jeitos de mostrar isso é se referindo a uma outra operação ainda, diferente da soma, subtração, multiplicação e divisão: essas já vimos que podemos usar indiscriminadamente no conjunto dos racionais. Passamos a mostrar que os racionais não são fechados em relação à **radiciação**. Para isso, vamos mostrar que o número $\sqrt{2}$ não pertence ao conjunto dos racionais.

Vamos começar apresentando três fatos:

1. Se $p \in \mathbb{Z}$ é par, então p^2 também é par.
2. Se $p \in \mathbb{Z}$ é ímpar, então p^2 também é ímpar.
3. Se $p \in \mathbb{Z}$ pode ser escrito como $2k$, para algum número $k \in \mathbb{Z}$, então p é um número par.

Antes de continuar, verifique que essas afirmações são verdadeiras.

Em seguida, uma observação sobre essa demonstração. Vamos usar um tipo de argumentação dita “prova por contradição”, que consiste nas seguintes etapas:

- Suponha algo absurdo (geralmente, o contrário do que você quer mostrar);
- Desenvolva a demonstração até chegar numa contradição;
- Conclua o contrário do que você supôs de início.

Aqui vamos querer mostrar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Portanto, vamos começar supondo o contrário disso, ou seja, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Mas isso quer dizer que existem dois números inteiros $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Além disso, vamos supor que a fração $\frac{p}{q}$ está em sua forma reduzida (ou seja: não é possível simplificá-la mais). Por causa disso, sabemos que não pode ser que p e q sejam dois números pares: se o fossem, então $\frac{p}{q}$ não estaria em sua forma reduzida. Retomando então o que temos até aqui:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

Pelo menos um entre p e q são ímpares.

Acompanhe o raciocínio:

Se $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, então $\frac{p^2}{q^2} = 2$

Multiplicamos os dois lados por q^2, obtendo $p^2 = 2q^2$.

Mas isso quer dizer que p^2 é um número par (veja o fato 3, acima). Mas se p^2 é par, então p também o deve ser (já que se p fosse ímpar, p^2 seria ímpar também, como indica o fato 2 acima). Se p é um número par, podemos escrever $p = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Portanto

$$p^2 = 2q^2$$

$$(2k)^2 = 2q^2$$

$$4k^2 = 2q^2$$

$$2k^2 = q^2$$

Mas isso quer dizer que q^2 é um número par. Pelo mesmo raciocínio acima, temos que q é um número par também. Mas isso é uma contradição! Lembre-se que havíamos suposto que ao menos um entre q e p eram ímpares. Como chegamos numa contradição, podemos concluir que a suposição absurda que fizemos (de que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) deve estar errada. Logo, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Sabemos que existem, então, números que não podem ser escritos como a divisão de dois números inteiros. A existência de números não racionais ocupou filósofos e matemáticos durante cerca de 2500 anos: dos pitagóricos até o século XIX. Os pitagóricos, escola de pensamento grega originada no século VI a.C., entraram em crise tão logo descobriram a existência de segmentos cujos comprimentos não podiam ser expressos como a razão entre números inteiros. Vamos chamar o conjunto dos números que não são racionais de **conjunto dos números irracionais**, denotado **Ir**.

É natural que surjam questões como as seguintes sobre esses números:

- Quantos são os números irracionais?
- Como são representados?
- Que números são irracionais?
- Como se distribuem?

Atualmente sabemos responder a maioria delas, por exemplo:

- O conjunto Ir tem cardinalidade infinita;
- Um número irracional tem expansão decimal infinita e não periódica.

  Ex: $\sqrt{2} = 1.4142135623730951$... A sequência de números depois da vírgula não contém nenhum padrão que se repete. Isso é diferente da expansão decimal de um número racional, que, se for infinita, será periódica:

  $\frac{1}{3} = 0,33333$...

  (note que o 3 se repete!)

  $\frac{3}{7} = 0,4285714285714285$...

  (note que a sequência 428571 se repete!)

  - Toda raiz de um número primo é um número irracional. Ou seja, se $p \in \mathbb{Q}$ é primo, então $\sqrt{p} \in Ir$.

O conjunto dos irracionais também não é fechado em relação à soma e subtração. Por exemplo, é verdade que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in Ir$, mas também temos que $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) \notin Ir$. Algo semelhante acontece na multiplicação.

Exercício 03.30

a) Escreva dois números irracionais cuja soma é racional;
b) Escreva dois números irracionais cuja diferença é racional;
c) Escreva dois números irracionais cujo produto é racional;
d) Escreva dois números irracionais cujo quociente é racional.

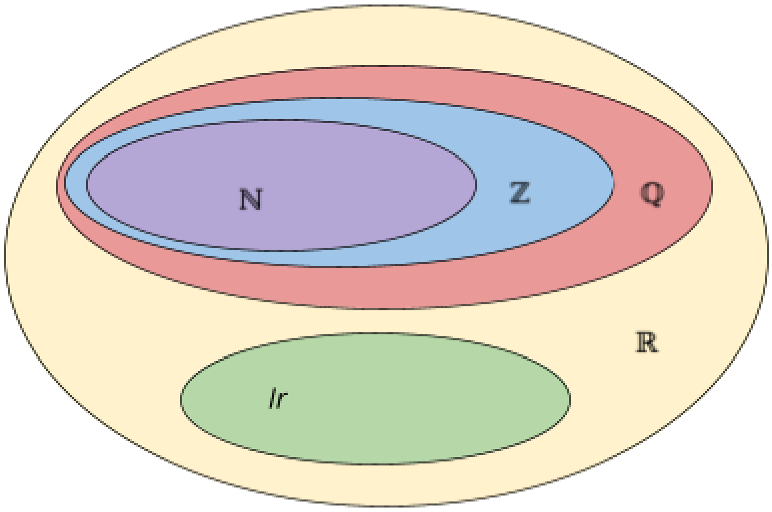
O conjunto dos números reais

Reunindo todos os números racionais e irracionais, obtém-se um novo conjunto denominado **conjunto dos números reais**, denotado por $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup Ir$$

Reunindo tudo que estudamos sobre conjuntos numéricos até aqui, temos o seguinte:

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
- $Ir \subseteq \mathbb{R}$
- $Ir \cup \mathbb{Q} = \emptyset$



Exercício 03.31 Resolva as equações, considerando que $k \in \mathbb{Q}$:

a) $k^2 = 9$
b) $k^2 = 7$
c) $3k^2 = 33$
d) $27 = k^2 + 2$
e) $k^2 - 2 = 27$
f) $(k + 1)^2 = 16$
g) $2(3 + k)^2 = 26$
h) $k^2 + 5k = 0$
i) $3k + 6k^2 + 1 = 1$
j) $k^2 + \sqrt{7}k = 0$
k) $k^2 =- 5k$

Exercício 03.32 Resolva as mesmas equações do exercício anterior, mas agora considerando que $k \in \mathbb{R}$.

04 - Fatoração

Propriedade distributiva

Faça o seguinte cálculo, mentalmente: $59 \cdot 101$. Talvez você tenha rapidamente chegado ao resultado, 5959, pelo seguinte raciocínio: 59 vezes 100 é igual a 5900. Basta adicionar 59 a isso para chegar ao resultado final: $5900 + 59 = 5959$.

A propriedade numérica por trás desse raciocínio é a **propriedade distributiva**. Podemos entender o raciocínio da seguinte forma: vamos reescrever a conta

$$59 \cdot 101$$

como

$$59 \cdot (100 + 1)$$

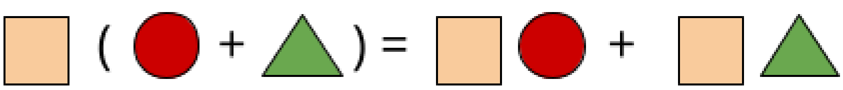
Repare que $59 \cdot 101$ e $59 \cdot (100 + 1)$ são a mesma conta: só fizemos reescrever o 101 como uma conta de mesmo valor. Repare também a importância dos parênteses: eles indicam que queremos fazer primeiro a soma e só depois a multiplicação. Continuando, sabemos que isso é o mesmo que

$$59 \cdot 100 + 59 \cdot 1$$

O que está acontecendo: ao multiplicar o 59 por uma soma, nós **distribuímos** o 59 para cada parcela dessa soma, multiplicando-o por cada uma:

$$59 \cdot (100 + 1) = 59 \cdot 100 + 59 \cdot 1$$

E isso vale em geral: sempre que multiplicamos um valor por uma soma, isso é o mesmo que a adição de cada parcela da soma multiplicada por esse valor. Ou então:



Ou, equivalentemente[21]:

$$x(a + b) = xa + xb$$

Polinômios

Vamos estabelecer uma nomenclatura para falar de alguns tipos de expressões algébricas, ou seja, expressões que contêm números, letras e sinais de operações. Vamos definir essa nomenclatura a partir do número de termos que estão sendo *somados*. Se é somente um termo, vamos chamar de **monômio**. Se são dois, **binômio**. Se forem três, **trinômio**. Se forem muitos, chamaremos de **polinômios**[22].

$3x^2y$	$2x + yz$	$x^2y + 5xz^3 + 6$
monômio	**binômio**	**trinômio**

Em álgebra, há o costume de chamar de expressões polinomiais ou polinômio não só as expressões com mais três parcelas. Monômios, binômios e trinômios também são chamados polinômios — assim como triângulos e quadriláteros também são chamados polígonos.

Exercício 04.0 Distribua as expressões.

a) $3(2 + b)$ **b)** $a(2 - a)5$ **c)** $a(a + b)$

d) $5a(2 - a)$ **e)** $5y(y + 1)$ **f)** $3k(k + p + 4)$

Exercício 04.1 Realize a multiplicação de polinômios.

a) $(x + c)(x + 5)$ **b)** $(2 - a)(5 + a)$

c) $(a + b)(a + b)$ **d)** $(y - 1)(y + 1)$

[21] Na verdade, a propriedade é mais genérica ainda, e se estende para somas de quaisquer número de parcelas: $x(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = xa_1 + xa_2 + xa_3 + \ldots + xa_n$

[22] O prefixo *mono* indica um, o prefixo *bi* indica dois, *tri*, três. O prefixo *poli* indica muitos.

arco

Fatoração

Fatorar significa decompor em fatores. Você já aprendeu a decompor um número em seus fatores primos[23]. Agora, vamos decompor expressões algébricas em seus fatores.

Considere a expressão $2x^2 + 2xy$. Vamos tentar responder à pergunta. Há alguma multiplicação que tem como resultado a expressão $2x^2 + 2xy$?

Podemos ver que cada uma de suas parcelas tem o **fator comum** $2x$.

$$2x^2 + 2xy = 2x \cdot x + 2x \cdot y$$

Nesses casos, dizemos que o $2x$ é o **fator comum** aos dois termos. Se tentarmos usar a **distributiva ao contrário**, veremos que

$$2x^2 + 2xy = 2x(x + y)$$

E dizemos que estamos colocando o fator comum **em evidência**. Veja outro exemplo:

$$6x^2y + 9x^2 + 12x$$

$$= 3x \cdot 2xy + 3x \cdot 3x + 3x \cdot 4$$

$$= 3x(2xy + 3x + 4)$$

Exercício 04.2 Fatore colocando o fator comum em evidência:

a) $6x + 6y$ **b)** $5a + 10b$ **c)** $3x + 6y + 9z$

d) $x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ **e)** $2x^2 + 4x^3 + 6x^4 + 8x^5$

Exercício 04.3 Fatore os seguintes polinômios:

a) $mb + md + 5b + 5d$ **b)** $ay + a + xy + x$

c) $7x - 7y + tx - ty$ **d)** $x^2 + tx + mx + mt$

Exercício 04.4 Você pode colocar o fator comum em evidência também nas expressões numéricas.

a) Coloque o fator comum em evidência, e depois resolva a conta.

i) $25 \cdot 731 + 75 \cdot 731$

[23] Por exemplo, ao dizer que 30 é 3 vezes 2 vezes 5.

ii) $11 \cdot 354 + 11 \cdot 5$
iii) $2 \cdot 35 + 35 \cdot 6$

b) Coloque os fatores comuns em evidência, e depois simplifique:

$$\frac{7 \cdot 9 + 9 \cdot 38 + 4 \cdot 58}{58 \cdot 3 + 38 \cdot 2}$$

Exercício 04.5 Fatore as seguintes expressões algébricas:

a) $ax + bx$ **b)** $ax^2 + bx^3$ **c)** $6x^3 + 9x^2 + 12x$
d) $ab + \frac{a}{3}$ **e)** $15xy + 20x$

Exercício 04.6 Fatore os seguintes polinômios.

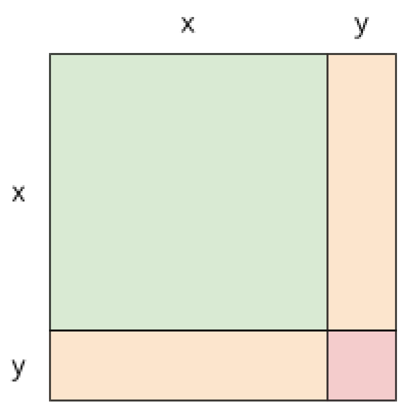
a) $b^2 + 7b + bc + 7c$ **b)** $-2a + 15 - a^2$

c) $x^2 + 2xy + y^2$ **d)** $y^2 - 1$

Trinômio quadrado perfeito

Esse é um caso de fatoração que nos interessa bastante, pois será bastante útil mais adiante. Nosso objetivo é identificar quando uma expressão é um trinômio quadrado perfeito e fatorar essa expressão.

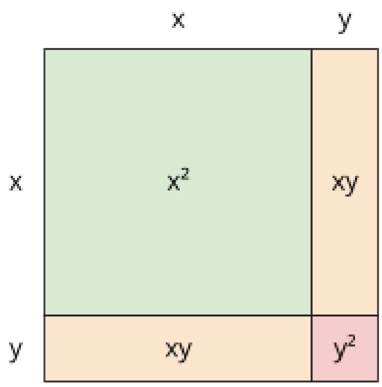
O trinômio quadrado perfeito (doravante TQP), como você já deve imaginar, é um trinômio, ou seja, é um polinômio de três termos. Mas por que *quadrado perfeito*? Observe o quadrado a seguir:



Vamos considerar a sua área. Sabemos que os lados desse quadrado são dados por $x + y$, logo, sua área deve ser igual a $(x + y)^2$. Se expandirmos essa expressão, teremos:

$$
\begin{aligned}
(x + y)^2 &= (x + y)(x + y) \\
&= x(x + y) + y(x + y) \\
&= x^2 + xy + yx + y^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2
\end{aligned}
$$

Repare que essa expansão corresponde às áreas das partes do quadrado em questão!



Isso é o TQP: um trinômio que representa a área de um quadrado. Nesse exemplo, o TQP é $x^2 + 2xy + y^2$. Outros exemplos de TQP:

$$a^2 + 2ab + b^2$$
$$4p^2 + 4pq + q^2$$
$$z^2 + 6z + 9$$

Note que o resultado da expansão do quadrado de uma subtração também é um TQP. Se você distribuir a expressão $(a - b)^2$, terá um TQP!

Exercício 04.7 Distribua a expressão $(a - b)^2$ e obtenha um TQP.

Exercício 04.8 Encontre os TQP's equivalentes às seguintes expressões:

a) $(a + 5)^2$ **b)** $(a - 5)^2$ **c)** $(2x + y)^2$ **d)** $(2x - y)^2$

e) $(3 + x)^2$ **f)** $(3 - x)^2$ **g)** $(2p + 3q)^2$ **h)** $(2p - 3q)^2$

i) $(x + \sqrt{2})^2$ **j)** $(x - \sqrt{2})^2$

Nos últimos exercícios, passamos da forma fatorada $(x + y)^2$ para a forma de TQP. Agora, vamos fazer o contrário. Como fatorar TQP's? Considere o caso abaixo:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2$$

Teremos que nos perguntar: qual é a expressão que, elevada ao quadrado, resulta em $4x^2$. Tem que ser o $2x$. E qual é a expressão que, elevada ao quadrado, resulta em $9y^2$? Tem que ser o $3y$! Temos a seguinte estrutura:

$$\begin{gathered} 4x^2 + 12xy + 9y^2 \\ = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 \end{gathered}$$

Nessa etapa, temos que verificar se o termo "do meio" deu certo: é verdade que $2(2x)(3y) = 12xy$? Sim! Então concluímos nossa fatoração.

$$\begin{gathered} 4x^2 + 12xy + 9y^2 \\ = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 \\ = (2x + 3y)^2 \end{gathered}$$

Exercício 04.9 Para cada expressão abaixo, identifique se são TQP's ou não. Se sim, fatore-a. Siga o exemplo.

Exemplo: $a^2 + 2ab + b^2$

É TPQ.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

a) $x^2 + 6ax + 9a^2$ **b)** $a^2 + 5a + 2$ **c)** $a^2 - 6a + 9$

d) $4z^2 - 4zw + w^2$ **e)** $9z^2 - 18z + 9$ **f)** $x^2 + 2x\sqrt{2} + 2$

g) $x^2 + 4x\sqrt{2} + 8$ **h)** $m^2 + 2m + 2$

Exercício 04.10 Cuidado! Nem sempre a disposição dos termos é aquela a que estamos mais acostumados! Veja o exemplo a seguir:

$$z^4 + 36 + 12z^2$$

Nele o termo "do meio" não está no meio! Fatore essa expressão.

Exercício 04.11 Algumas vezes há mais fatorações a serem feitas antes de o TQP "aparecer". Veja o exemplo:

$$4a^2x^4 - 40a^2bx^2 + 100a^2b^2$$

Coloque o fator comum em evidência e, em seguida, fatore o TQP que aparecer dentro do parênteses.

Referências

01 - Criptografia

CRYPTOGRAPHY: “Crash Course Computer Science, 2017”. 1 vídeo (12:32). Publicado pelo CrashCourse. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=jhXCTbFnK8o. Acesso em: 24 fev. 2022.

Para continuar estudando, alguns materiais sobre chave simétrica e assimétrica:

- youtube.com/watch?v=AQDCe585Lnc (legendado)
- youtube.com/watch?v=GSIDS_lvRv4 (sem legenda)
- pt.wikipedia.org/wiki/Criptografia_de_chave_p%C3%BAblica

02 - Potenciação

LEONARDO, Fábio Martins de. "Projeto Araribá: Matemática 9º ano." *Moderna* (2010).

IMENES, Luiz Márcio, e MARCELO Lellis. "Matemática: Imenes & Lellis 9º ano”. São Paulo. *Moderna* (2010).

03 - Conjuntos

LOPES, Antonio José. “Matemática atual 8ª série”. São Paulo. *Atual* (1994).

04 - Fatoração

LOPES, Antonio José. “Matemática atual 8ª série”. São Paulo. *Atual* (1994).

IMENES, Luiz Márcio, e MARCELO Lellis. "Matemática: Imenes & Lellis 9º ano”. São Paulo. *Moderna* (2010).