Investigando o primeiro capítulo d'O capital

Os trechos abaixo são citação de MARX, Karl. Os economistas. ***O capital****, 1996, vol. 1, pp 181 - 183*

No primeiro capítulo de seu livro "O Capital", Marx desenvolve a ideia de que o valor de uma mercadoria é **proporcional** ao tempo de trabalho necessário para produzi-la. Já que todas as mercadorias necessitam algum tempo de trabalho para serem produzidas, podemos falar de um **valor relativo** entre mercadorias, ou seja, quanto uma mercadoria vale em termos de uma outra. É disso que ele vai dizendo:

> "A equação: "20 varas de linho = 1 casaco, ou: 20 varas de linho valem 1 casaco" pressupõe que 1 casaco contém tanta substância de valor quanto 20 varas de linho, que ambas as quantidades de mercadorias custam assim o mesmo trabalho ou igual quantidade de tempo de trabalho."

Exercício 1: Se 20 varas de linho = 1 casaco,

a) quantas varas de linho valem 3 casacos?

b) quantos casacos valem 200 varas de linho?

O texto segue:

> "O tempo de trabalho necessário para a produção de 20 varas de linho ou 1 casaco altera-se, porém, com cada alteração na força produtiva da tecelagem ou da alfaiataria. A influência de tais mudanças sobre a expressão relativa da grandeza de valor deve agora ser examinada mais de perto.
>
> I. Que mude o valor do linho, enquanto o valor do casaco permanece constante. Se o tempo de trabalho necessário para a produção do linho dobra, talvez em conseqüência de crescente infertilidade do solo em que se produz o linho, então duplica seu valor. Em vez de 20 varas de linho = 1 casaco, teríamos 20 varas de linho = 2 casacos, pois 1 casaco contém agora apenas metade do tempo de trabalho das 20 varas de linho. Ao contrário, se diminui à metade o tempo de trabalho necessário para a produção do linho em conseqüência, por exemplo, da melhoria dos teares, cai também o valor do linho pela metade. Conseqüentemente, agora: 20 varas de linho =

> 1/2 casaco. O valor relativo da mercadoria A, isto é, seu valor expresso na mercadoria B, sobe e cai, portanto, diretamente com o valor da mercadoria A, enquanto permanece o mesmo o valor da mercadoria B.”

Exercício 2: Se o t*empo de trabalho* para produzir um casaco muda, o *valor* da vara de linho muda?

Exercício 3: Se o t*empo de trabalho* para produzir um casaco muda, o *valor relativo* da vara de linho, isto é, seu valor expresso no casaco, muda?

Exercício 4: Suponha que 20 varas de linho valiam o mesmo que 1 casaco. Se o tempo de trabalho para produzir a vara de linho dobra, quantos casacos valem, agora, 80 varas de linho?

Continuando...

> “II. Que o valor do linho permaneça constante, enquanto muda o valor do casaco. Se duplica, sob essas circunstâncias, o tempo de trabalho necessário para a produção do casaco, por exemplo, em conseqüência de uma tosquia desfavorável, então temos em vez de 20 varas de linho = 1 casaco, agora: 20 varas de linho = 1/2 casaco. Se, ao contrário, o valor do casaco cai à metade, então 20 varas de linho = 2 casacos. Permanecendo constante o valor da mercadoria A, cai ou sobe, portanto, seu valor relativo expresso na mercadoria B, em relação inversa à mudança de valor de B.”

Exercício 5: Suponha que 20 varas de linho valiam o mesmo que 1 casaco. Se o tempo de trabalho para produzir o casaco dobra, quantos casacos valem, agora, 40 varas de linho?

E ainda,

> “Ao se compararem os diferentes casos, sob I e II, resulta que a mesma mudança de grandeza do valor relativo pode provir de causas totalmente opostas. Assim 20 varas de linho = 1 casaco se transforma em: 1) a equação 20 varas de linho = 2 casacos, ou porque o valor do linho duplica-se, ou porque o valor dos casacos cai à metade; e 2) a equação 20 varas de linho = 1/2 casaco, ou porque o valor do linho cai à metade ou porque o valor do casaco sobe ao dobro.”

Exercício 6: Suponha que 20 varas de linho valiam o mesmo que 1 casaco. Depois de uma mudança de clima, o tempo de trabalho para produzir uma vara de linho diminuiu pela metade, mas o valor relativo do casaco com a vara de linho ainda é a mesma. O que deve ter acontecido com o tempo de trabalho necessário para produzir um casaco?

Exercício 7: Suponha que 20 varas de linho valiam o mesmo que 1 casaco. Depois de uma mudança de clima e de uma tosquia favorável:

- o tempo de trabalho necessário para produzir um casaco tornou-se três vezes menor e;
- o tempo de trabalho necessário para produzir uma vara de linho diminuiu pela metade.

Qual é, agora, o valor relativo de uma vara de linho em relação a um casaco?

Para terminar...

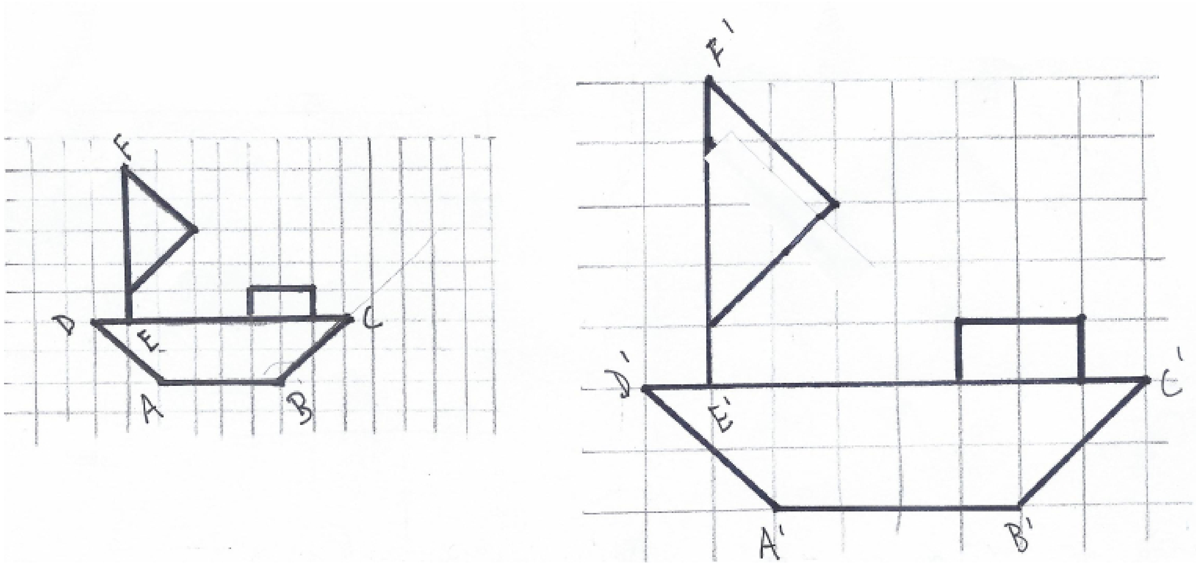
> "As mudanças reais na grandeza de valor não se refletem nem clara nem completamente, em sua expressão relativa ou na grandeza do valor relativo. O valor relativo de uma mercadoria pode mudar, apesar de seu valor permanecer constante. Seu valor relativo pode permanecer constante, apesar de mudar seu valor e, finalmente, não necessitam, de nenhuma forma, coincidir as mudanças simultâneas em sua grandeza de valor e na expressão relativa dessa grandeza."

Glossário

Vara de linho – Vara é uma medida de distância. Linho é um tipo de tecido.
Tosquia – O processo pelo qual a lã é extraída dos animais.

Comparando figuras

Compare as duas imagens abaixo. A da esquerda está desenhada em quadrados de 0,5x0,5cm. Na da direita, os quadrados são de 1x1cm.



-> O que há de diferente entre elas?
-> O que é igual?

Talvez você tenha pensado algo assim: “elas têm a mesma forma, mas tamanhos diferentes”, ou então, “é a mesma imagem, só que ampliada”. É verdade, elas são muito parecidas exceto pelo tamanho delas. Aliás, com isso já sabemos que elas **não são congruentes**.

Para entender melhor o que está acontecendo, vamos comparar, primeiro, os **ângulos** correspondentes nas figuras. Deve ser fácil ver que eles são congruentes, ou seja, a cada ângulo na figura da esquerda corresponde um ângulo de mesma medida na figura da direita.

Depois, vamos comparar as **medidas** dos segmentos correspondentes das duas imagens. Estamos chamando de lado o a medida de um lado de um quadrado que compõe o quadriculado da figura (na figura pequena, um lado = 0,5 cm, enquanto na grande um lado = 1 cm)

AB = 4 lados = 2cm	A’B’ = 4 lados = 4cm
DC = 8 lados = 4cm	D’C’ = 8 lados = 8cm
EF = 5 lados = 2,5cm	A’B’ = 5 lados = 5cm
EC = 7 lados = 3,5cm	A’B’ = 7 lados= 3,5cm

Você deve ter percebido que cada segmento da figura da direita mede o mesmo número de lados do segmento correspondente do lado esquerdo. Mas o lado da cada quadradinho na figura da esquerda é metade do quadradinho da figura da direita. Então a medida da figura de um segmento da direita é sempre o dobro da medida do segmento correspondente à esquerda! Podemos reescrever esse fato da seguinte maneira:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{DC}{D'C'} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{EF}{E'F'} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{EC}{E'C'} = \frac{1}{2}$$

Ou então, mais sucintamente:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{DC}{D'C'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{EC}{E'C'} = \frac{1}{2}$$

Em outras palavras, a **razão** entre os lados correspondentes é a mesma. Quando isso ocorre, dizemos que as figuras são **proporcionais** e que a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{2}$.

Razão é uma relação entre dois valores que indica quantas vezes um valor contém o outro, ou então, quantas veze o outro "cabe" no um. Podemos expressar a razão de 1 para 2 de alguns jeitos:

- 1/2
- 1 : 2
- 0,5
- "um está para dois..."

No primeiro semestre nos perguntávamos se duas figuras eram iguais ou não (para se relembrar, retome a atividade *03 - Congruência*[1]). Foi um pouco confuso tentar responder isso, e chegamos à conclusão que a igualdade entre figuras não era um conceito muito preciso, pelo menos não matematicamente. Por isso, introduzimos o conceito de congruência. A ideia era a seguinte: duas figuras são congruentes se têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

Agora, nos deparamos com duas figuras que não são congruentes, mas tem algo em comum... Parece que elas têm a mesma forma, mas não o mesmo tamanho. Para falar de figuras que satisfazem essas condições, vamos introduzir o conceito de semelhança.

Semelhança

Informalmente, dizemos que duas figuras são semelhantes se têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Se tratarmos de polígonos, poderemos ser mais precisos: dois polígonos são semelhantes se

1) as medidas dos lados que se correspondem forem proporcionais e;

2) os ângulos correspondentes forem congruentes.

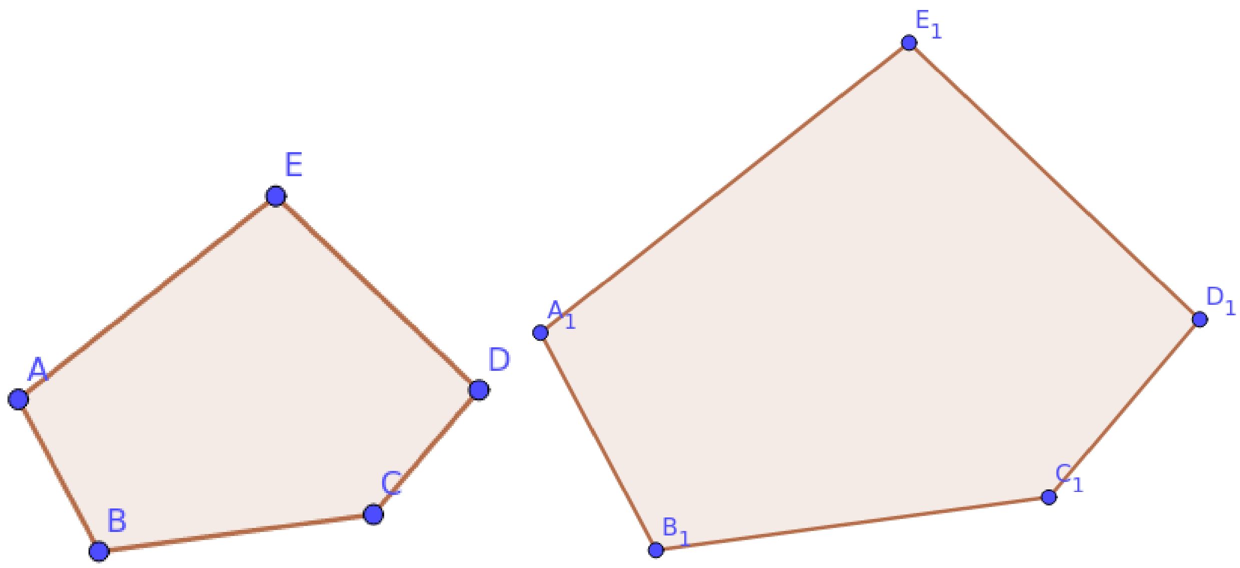
Alternativamente, podemos pensar que duas figuras quaisquer são semelhantes se partindo de uma é possível chegar na outra somente com as seguintes operações:

- Ampliação/Redução
- Rotação
- Reflexão
- Translação

Como vimos, é o caso das duas figuras no início da página: seus segmentos são proporcionais e os ângulos são iguais. As figuras são semelhantes!

[1] https://arco.coop.br/~jseckler/mat-9-2021/03.pdf

Lados que se **correspondem** são os que estão na mesma posição relativa nos dois polígonos. Na figura do início da seção, AB corresponde a A'B', DC corresponde a D'C', etc. Vamos ver outro exemplo:



Os dois pentágonos foram desenhados de modo que sejam semelhantes. Por isso, ocorrem essas relações:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = k$$

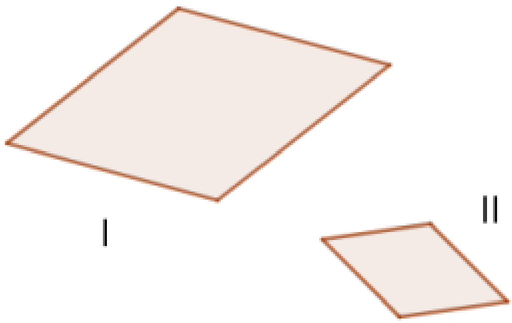
O número **k**, que é a constante da proporção, chama-se **razão de semelhança**. Nesse exemplo, temos $k = \frac{2}{3}$, ou seja, a razão dessa semelhança é de 2 para 3.

Exercício 8. Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa. Se a afirmação for falsa, desenhe um contra exemplo para ela.

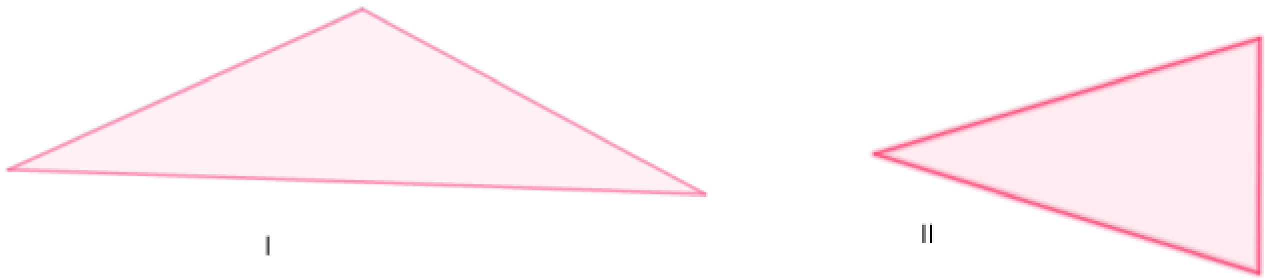
a) Dois triângulos são sempre semelhantes.
b) Dois triângulos equiláteros são sempre semelhantes.
c) Dois triângulos isósceles são sempre semelhantes
d) Dois retângulos são sempre semelhantes.
e) Dois quadrados são sempre semelhantes.

Exercício 9. Nos casos seguintes, diga se os polígonos I e II são semelhantes:

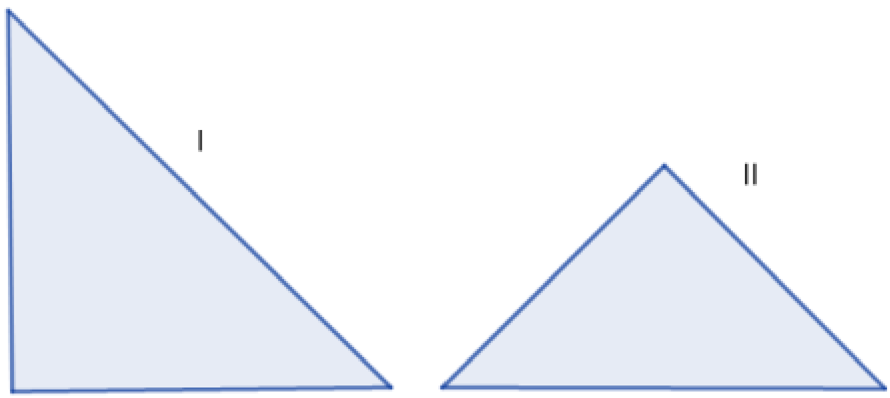
a) I e II são losangos;



b) I e II são triângulos isósceles;



c) I e II são triângulos retângulos e isósceles.



Exercício 10. A miniatura é semelhante ao automóvel e a razão dessa semelhança é de $1:20$.

a) Qual é o comprimento da miniatura, se o carro tem 4,0 m de comprimento?

b) Na miniatura, a distância entre as rodas é 6,5 cm. No automóvel, qual é essa medida?

Exercício 11. A ampliação de uma foto deve ser executada de maneira precisa para que se obtenham imagens matematicamente semelhantes. Se uma foto 6 por 9 (isto é, uma foto retangular com largura 6 cm e altura de 9 cm) for ampliada para ter 21 cm de largura, qual será sua altura?

Exercício 12.

a) Complete a tabela abaixo, que relaciona razões, modos de dizê-las em português e exemplos em que elas aparecem. Repare que há vários jeitos de completar todas as entradas.

Razão entre A e B		
Número	**Em português**	**Exemplo**
$\frac{A}{B} = \frac{1}{20}$	"B é 20 vezes maior que A"	"A miniatura de um carro é 20 vezes menor que o próprio carro."
$\frac{A}{B} = \frac{6}{21}$	"A está para B assim como 6 está para 21"	"Uma foto 6 por 9 deve ser ampliada para uma foto de largura 21"
$A: B = 2: 3$	"B é três metades de A"	"Um pentágono é semelhante a outro, com razão de semelhança $k = \frac{2}{3}$"
	"A é o dobro de B"	
		A escala desse mapa é de 1 : 5000
	"B é o triplo de A"	

$\frac{A}{B} = \frac{1}{10}$		
$\frac{A}{B} = 10$		
	“B é a metade de A”	
$\frac{A}{B} = 3$		
$\frac{A}{B} = 1$		
		“Uma tonelada equivale a 1000 quilos”
		“Uma polegada é igual a 2,54 centímetros”
		“Um milhão de nanômetros equivalem a um metro”

b) Imagine que houvesse uma linha na tabela acima em que constasse B = 0. Pense consigo: o que aconteceria com a segunda e terceira coluna? Agora, considerando que a divisão entre números (e portanto, números em geral) pode representar relações entre grandezas, complete a frase:

“Não faz sentido dividir por zero porque não faz sentido _________”

Regra de três

Vários questões de semelhança e proporcionalidade nos levam a perguntas com a seguinte “cara”:

“**x** está para 5 assim como 20 está para 25”

Ou seja, a razão entre **x** e 5 segue a mesma proporção que a razão entre 20 e 25. Nesses casos, podemos montar uma equação:

$$\frac{x}{5} = \frac{20}{25}$$

Nós já sabemos resolver uma equação desse tipo: Basta multiplicar por 5 dos dois lados!

$$x = \frac{20}{25} \cdot 5$$

$$x = 4$$

A **regra de três**, em sua forma mais simples, é um processo prático para simplificar a resolução desse tipo de equação. A ideia por trás dela é a de “multiplicar em cruz”, como abaixo:

$$\frac{x}{5} = \frac{20}{25} \Rightarrow x \cdot 25 = 20 \cdot 5$$

$$x = \frac{20 \cdot 5}{25}$$

$$x = 4$$

Ou seja: quando temos que uma fração é igual a outra, sabemos que o numerador da primeira vezes o denominador da segunda é igual ao numerador da segunda vezes o denominador da primeira. Nesse exemplo, a regra nem parece tão prática. Suponha que tivéssemos, no entanto, a seguinte situação:

“10 está para **x** assim como 50 está para 45”

Veja a resolução:

$$\frac{10}{x} = \frac{50}{45} \Rightarrow 10 \cdot 45 = 50 \cdot x$$

$$x = \frac{10 \cdot 45}{50}$$

$$x = 9$$

De modo geral, a regra de três diz que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $ad = bc$.

Exercício 13. Uma maquete, de 90 cm de altura, é semelhante a um edifício, que mede 60m de altura.

a) Em que escala foi construída a maquete (onde *escala* é a razão de semelhança entre as duas figuras)?
b) Qual é a altura de uma porta do prédio, se, na maquete, ela mede 3 cm?
c) Usando essa mesma escala, qual seria a altura da maquete se o prédio tivesse 80 m de altura?
d) Com base nos dados desse problema, elabore mais uma questão e responda-a.

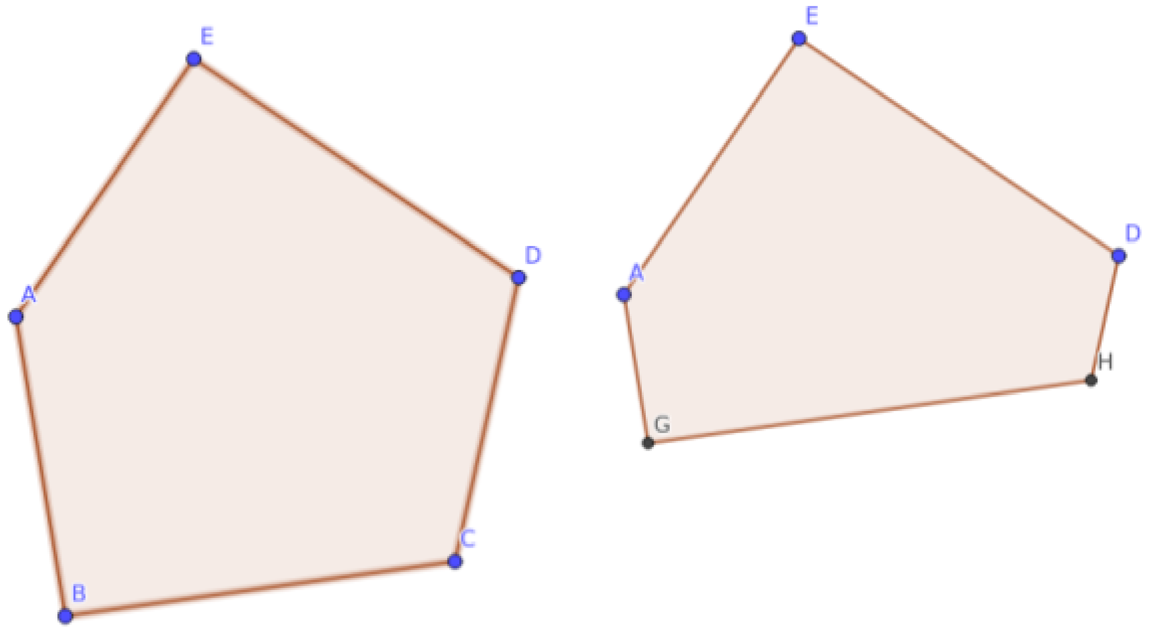
Exercício 14. Imagine qtue as arestas de um cubo **C** meçam 5 cm e as de um cubo **D** meçam 20 cm (repare que dois cubos são sempre semelhantes).

a) Calcule a razão **k** de semelhança do cubo **C** para o cubo **D**.
b) Calcule as áreas das superfícies totais desses cubos[2];
c) Qual é a razão entre a área total do cubo **C** e a do cubo **D**?
d) Calcule o volume dos cubos[3];
e) Qual é a razão entre esses volumes?
f) Você nota algum padrão nas três respostas de **a**, **c**, e **e**?

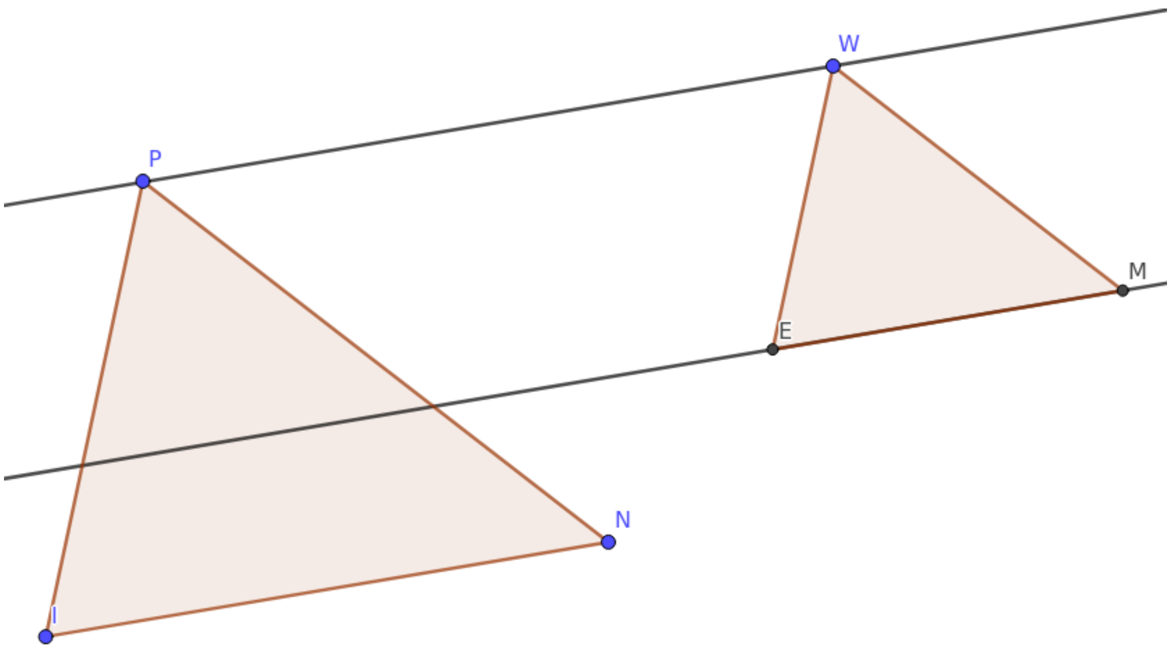
[2] Dica: a área da superfície total de um cubo é a soma das áreas de todas as suas faces.
[3] Dica: assim como a área de um quadrado é calculada por $\ell \times \ell$, onde ℓ é o lado do quadrado, o volume de um cubo é calculado por $\ell \times \ell \times \ell$.

Triângulos semelhantes

O pentágono ABCDE foi cortado por uma reta paralela a um de seus lados:



Por observação visual, percebe-se que os pentágonos ABCDE e AGHDE não são semelhantes. De fato, eles têm ângulos de mesma medida, mas seus lados não são proporcionais, pois de AB para AG o lado diminui, enquanto outros lados, como AE, ficaram os mesmos. Vamos agora cortar o triângulo PIN por uma reta paralela a um de seus lados. Os triângulos PIN e WEM têm ângulos iguais:

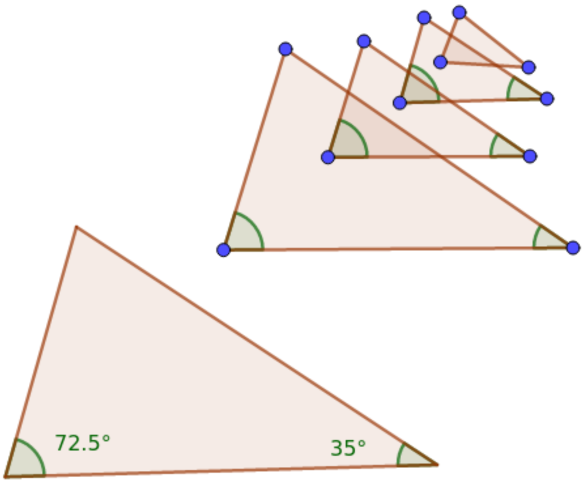


Note que para formar WEM, os três lados de PIN diminuíram. A conclusão é a seguinte: basta que dois triângulos tenham os **ângulos respectivamente iguais** para serem **semelhantes.**

Além disso, no momento em que determinamos dois ângulos de um triângulo, já poderemos saber qual é o terceiro ângulo, já que os três totalizam 180º. Ou seja, a *forma* de um triângulo fica totalmente definida quando são conhecidos dois de seus ângulos.

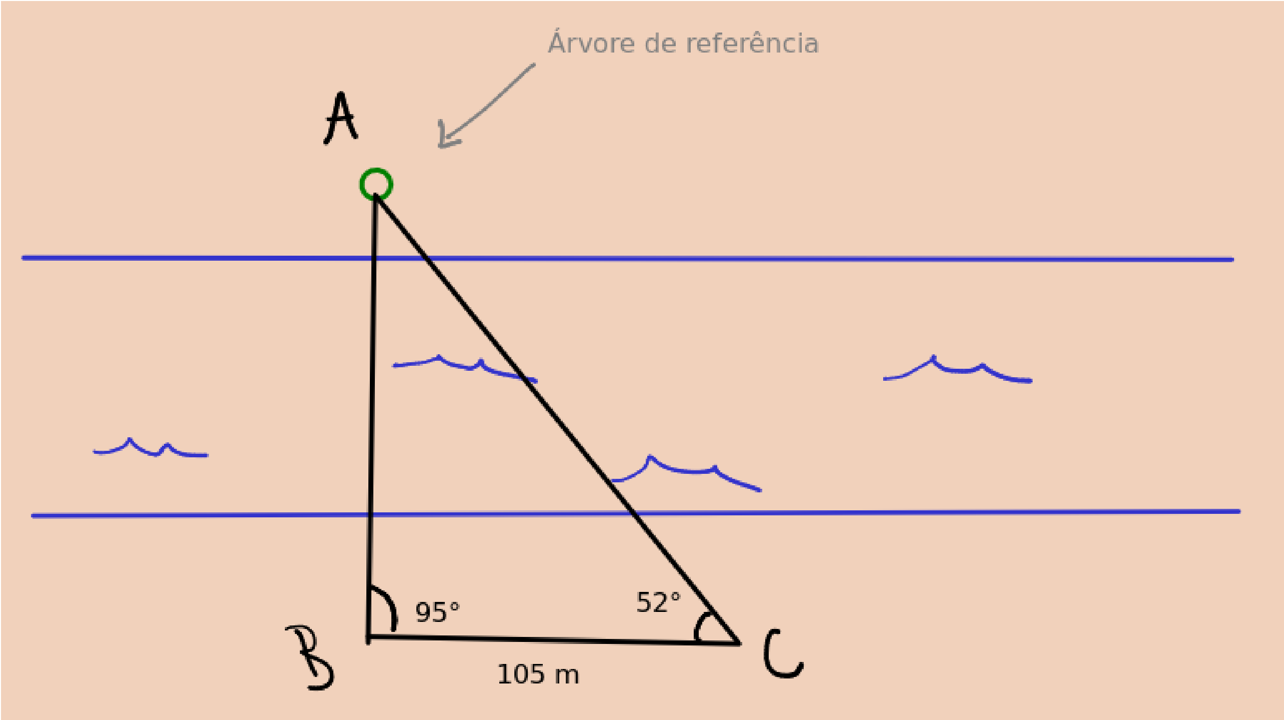
Note que essa conclusão só vale para triângulos, e não para quaisquer polígonos, como é possível perceber com o exemplo dos pentágonos ABCDE e AGHDE acima.

De acordo com essa conclusão, todos os triângulos com um ângulo de 72,5º e outro de 35º têm o mesmo formato!

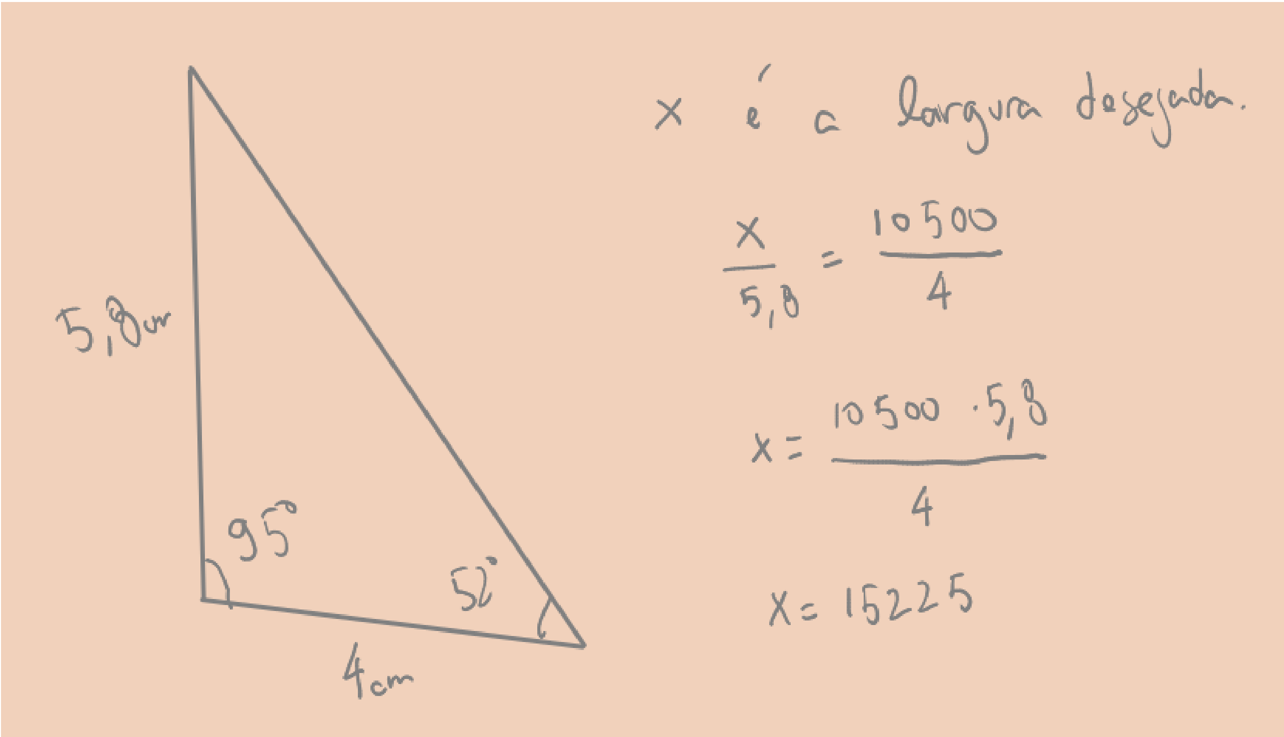


Exercício 15. Baseie-se no caso **ALA** de congruência de triângulos para argumentar que a conclusão “basta que dois triângulos tenham os ângulos respectivamente iguais para serem semelhantes” é verdadeira.

Essa propriedade dos triângulos oferece inúmeras aplicações. Uma delas é determinar certa medida, sem verdadeiramente fazer essa medição. Por exemplo, veja como se pode obter a largura aproximada de um rio. Com instrumentos apropriados, agrimensores medem os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e o lado BC de um triângulo imaginário.



A seguir, um desenhista constrói, usando medidas obtidas para os dois ângulos, um triângulo semelhante ao imaginado. Medindo os lados do triângulo desenhado e usando proporcionalidade, encontra-se a largura desejada.



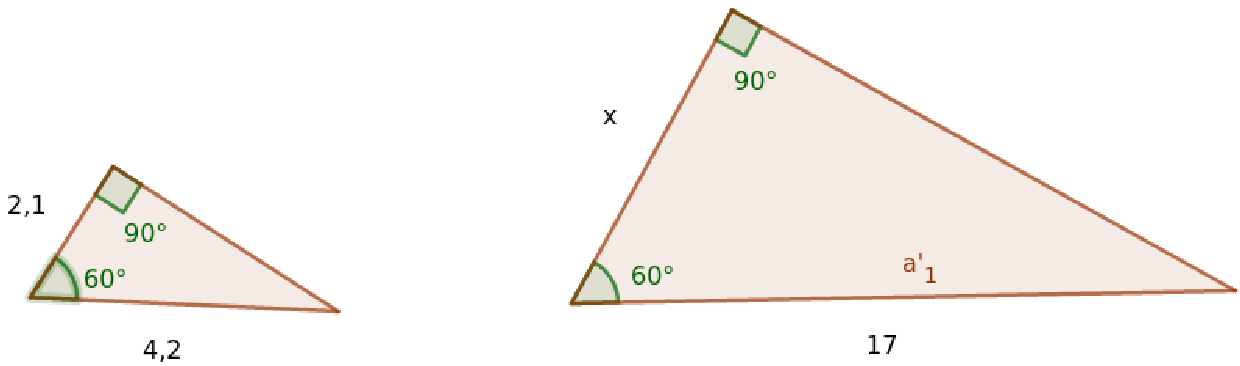
Logo, a largura aproximada do rio é de 152 m. Calculando-a dessa maneira evita-se muito trabalho. Nem foi necessário atravessar o rio!

Problemas desse tipo são comuns em várias atividades e há muitos séculos existem instrumentos para medir ângulos. Na Astronomia e na navegação, é essencial saber usá-los, bem como conhecer semelhança de triângulos.

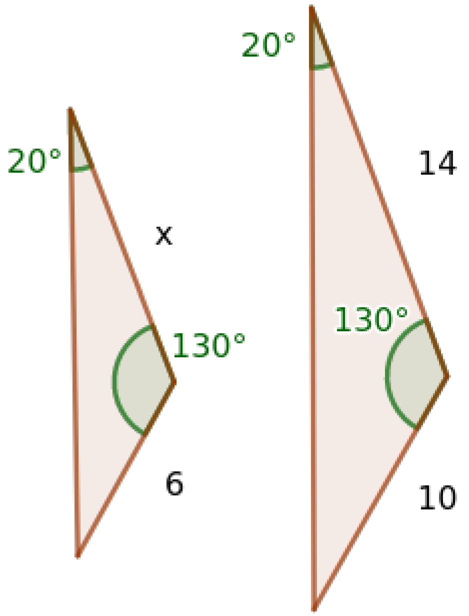
Nas ruas, você já deve ter visto equipes trabalhando sob a orientação de um topógrafo ou agrimensor. Com um aparelho chamado teodolito, são medidos ângulos e distâncias. Associados a conhecimentos matemáticos, esses dados são usados na elaboração de plantas e mapas

Exercício 16. Calcule a medida **x**, em cm. Considere que as medidas dadas estão em centímetros.

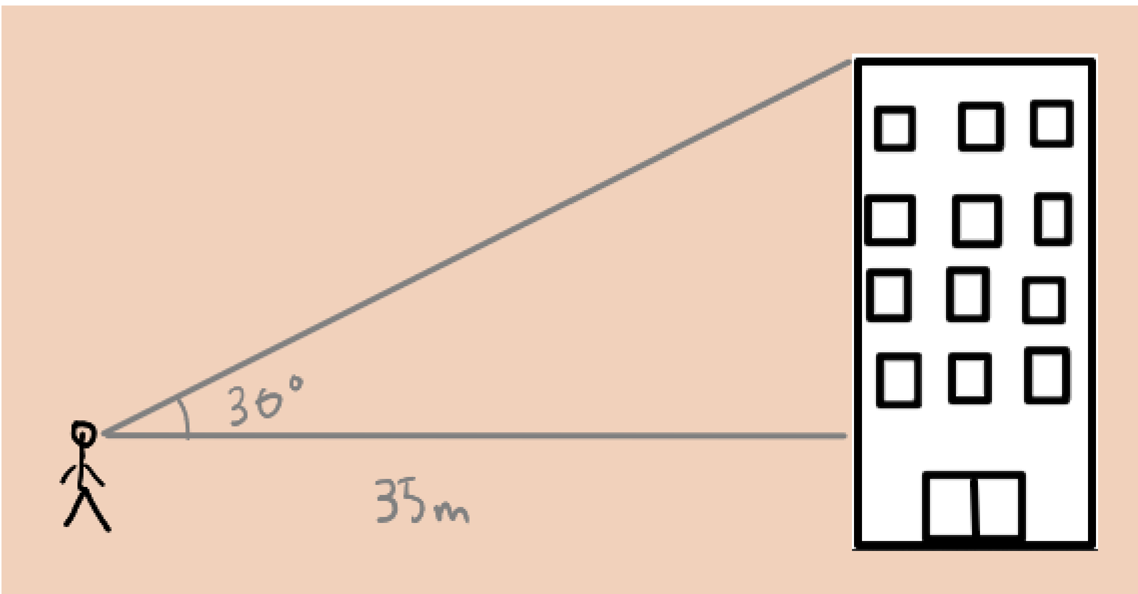
a)



b)

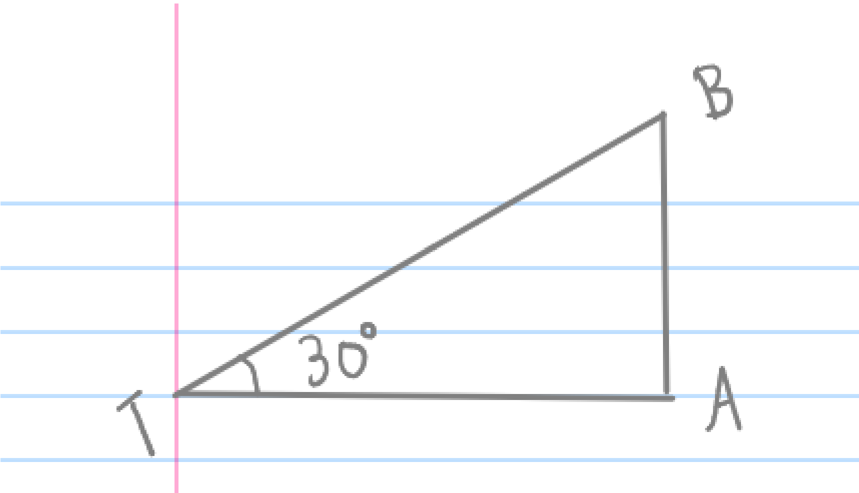


Exercício 17. Márcia resolveu fazer como os topógrafos. Mediu um ângulo (30°) e uma distância (35 m):



Depois, fez o desenho ao lado com o máximo capricho.

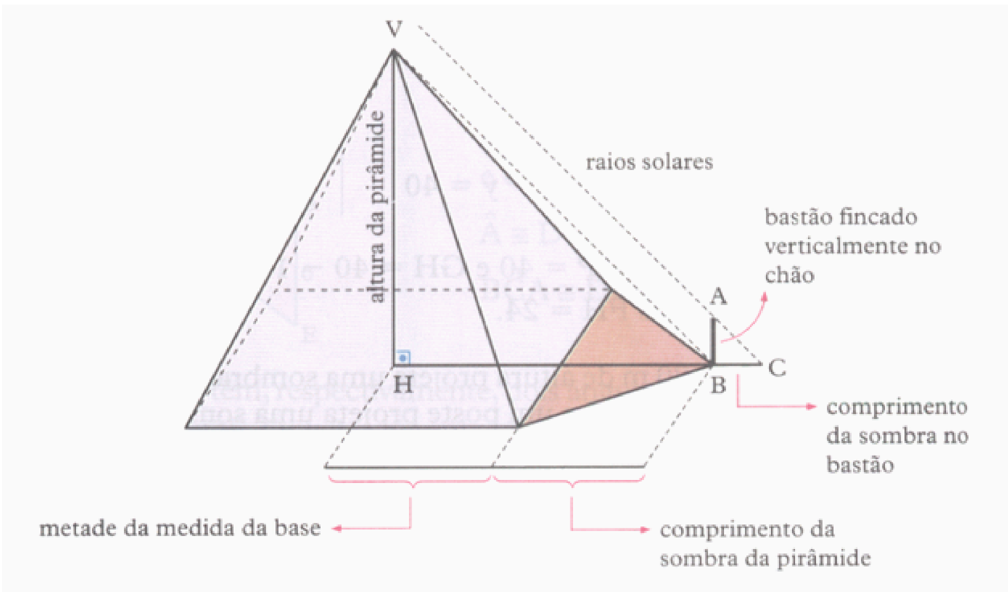
No desenho, meça os comprimentos TA e TB. Considere que os olhos de Márcia estavam a 1,5 m do solo quando ela fez a medição. Qual é a altura aproximada do prédio?



A altura da Pirâmide de Quéops

Tales de Mileto foi um filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo da Grécia Antiga. Acredita-se que Tales foi desafiado a medir a altura da grande pirâmide de Quéops, no Egito.

Em seus estudos, Tales observou que os raios solares que chegavam à Terra incidiam de forma inclinada e eram paralelos. Assim, ele concluiu que havia uma proporcionalidade entre as medidas **da sombra** e **da altura** dos objetos.



A explicação mais simples[4] do método é a de que Tales fixou uma estaca perpendicularmente ao solo no ponto em que a sombra projetada da pirâmide acabava.

Com a ideia de que os raios de sol incidem inclinados e paralelos, Tales pôde notar uma semelhança nos triângulos formados pelos pontos imaginários VHB e ABC.

Exercício 18. Suponha que Tales tenha feito as seguintes medições:

$$HB = 200\,m$$
$$BC = 1\,m$$
$$AB = 0,79\,m$$

Qual foi a altura encontrada?

Notação

Vamos introduzir uma notação para falar de semelhança de figuras. Se P e Q são figuras, podemos escrever

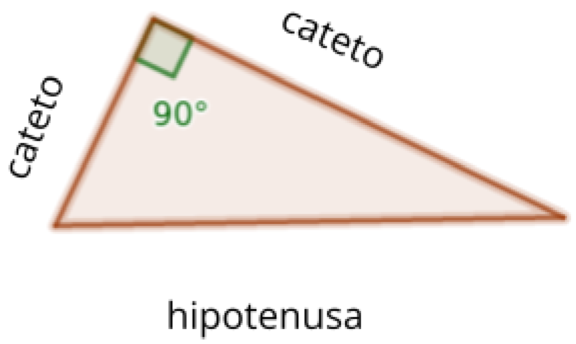
$$P \sim Q$$

para dizer que P é semelhante a Q.

Semelhança no triângulo retângulo

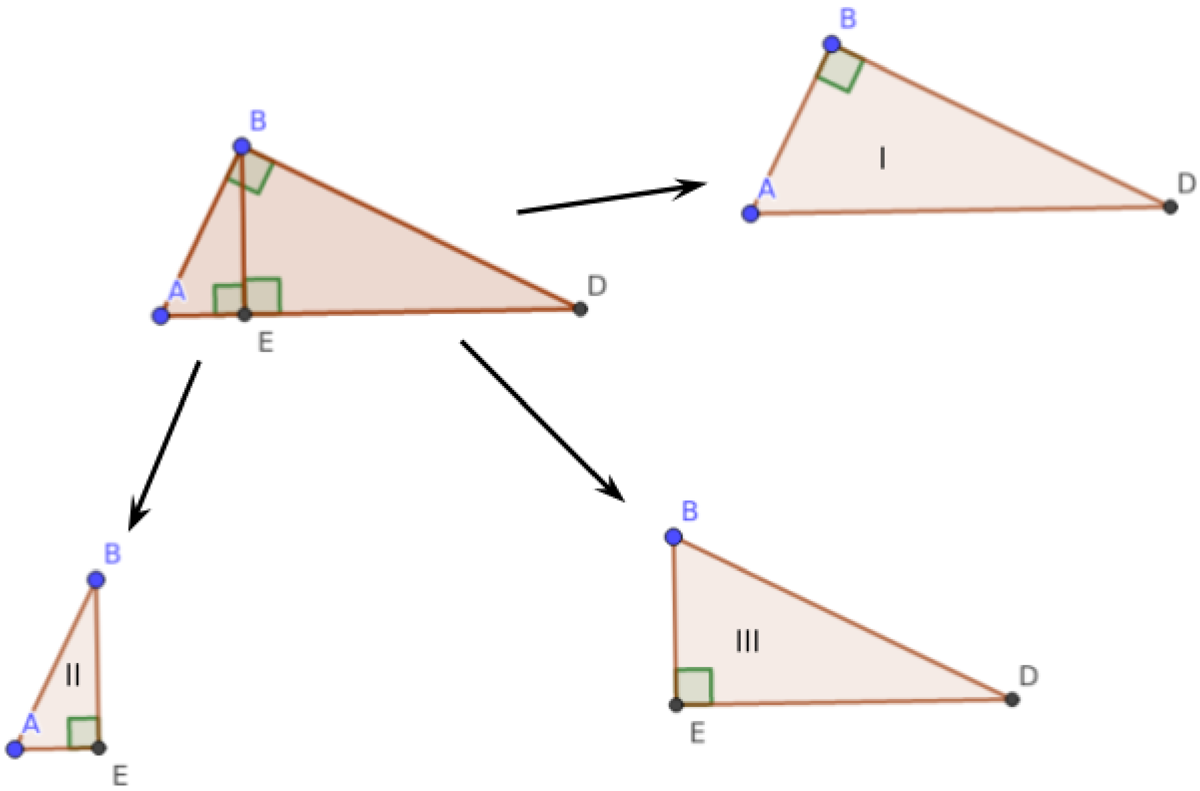
Os triângulos retângulos aparecem tanto nos objetos, edifícios e na própria matemática, que seus lados acabaram recebendo nomes especiais. Lembrando:

- Hipotenusa é o nome do lado oposto ao ângulo de 90°.
- Cateto é o nome dado aos outros dois lados



[4] Outra versão diz que Tales simplesmente esperou o momento do dia em que as sombras ficam do mesmo comprimento que as alturas. Bastou medir a sombra da pirâmide!

Há uma propriedade envolvendo semelhança que só os triângulos retângulos possuem. Num triângulo retângulo, traçando a altura relativa à hipotenusa, dois novos triângulos retângulos são formados. Vamos designar por I, II e III esses três triângulos.



A propriedade em questão é que os três triângulos são semelhantes dois a dois. Ou seja, I é semelhante a II, II e semelhante a III e I é semelhante a III.

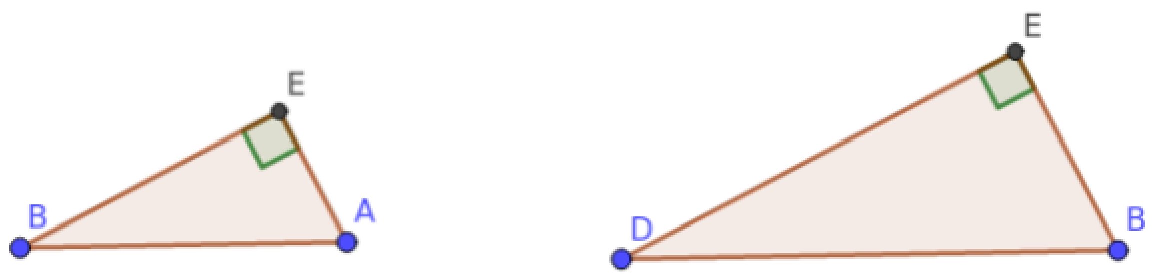
Exercício 19. O objetivo desse exercício é mostrar a propriedade acima. Vamos usar a conclusão da seção anterior de que se dois triângulos têm dois ângulos respectivamente congruentes, então eles são semelhantes.

a) Para provar que $I \sim II$, encontre um ângulo em I que seja congruente a um ângulo em II. Depois, encontre outro ângulo em I (diferente do que você acabou de achar) que seja igual a outro ângulo em II.

b) Para provar que $II \sim III$, repita o mesmo procedimento, mas considere o triângulo II ao invés do I.

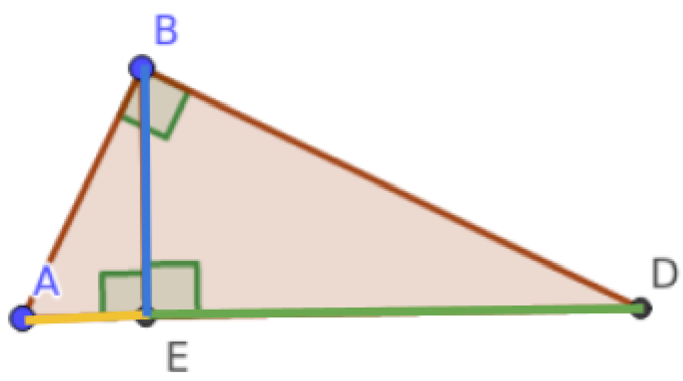
c) Por fim, mostre que se $I \sim II$ e $II \sim III$ então $I \sim III$

Com base nessas semelhanças, podemos encontrar várias relações entre as medidas dos lados desses triângulos. Como exemplo, vamos olhar para o caso dos triângulos II e III. Colocando-os em posição semelhante, é fácil escrever as relações de proporcionalidade:



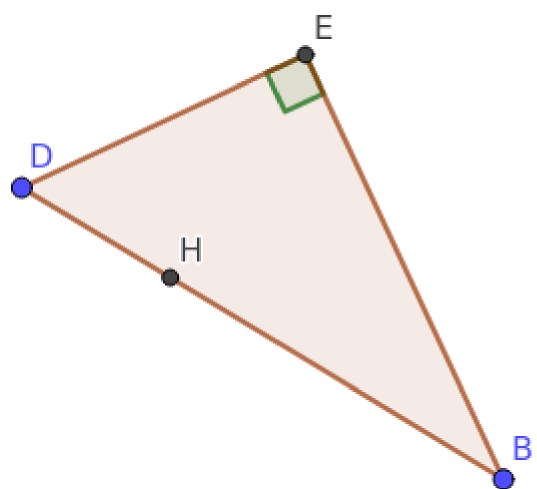
$$\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{BE}$$

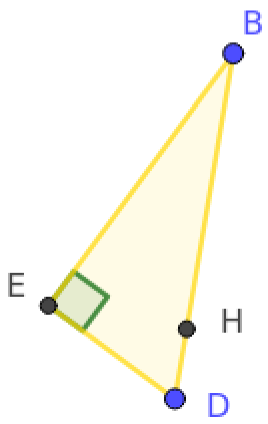
Aplicando a regra de três, ficamos com $(BE)^2 = DE \cdot AE$. Veja só:



Sabemos que o comprimento em azul ao quadrado é igual ao comprimento amarelo vezes o verde!

Exercício 20. Considere o triângulo EDB, em que o ângulo Ê é de 90°, EH é a altura em relação à hipotenusa, DH = 2 e HB = 8. Calcule a altura EH. Considere que as medidas estão em metros.





Exercício 21. No triângulo EBD, o ângulo $\hat{B}$ mede 32°, e EH é a altura do triângulo em relação a BD.

a) Quais são as medidas dos ângulos internos do triângulo EHB?

b) Quais são as medidas dos ângulos internos do triângulo EHD?

c) Os triângulos EDH e EHB são semelhantes ao triângulo EBD?