O número Pi

Matemática

9º ano set/2021

Material inspirado no livro "Matemática Atual 8ª série", Antônio José Lopes Bigode. São Paulo, Atual, 1994

O estudo das medidas numa circunferência remonta à antiguidade. Já na Bíblia há referências à relação entre as medidas do perímetro e do diâmetro de uma circunferência. Numa passagem, conta-se que rei Salomão mandou que um artesão de nome Hirão, especialista em trabalhos de bronze, fizesse um trabalho num templo em Jerusalém, construído entre 1014 e 1007 a.C. No primeiro livro dos Reis, consta a descrição de um tipo de reservatório de forma circular.

> *"Fez mais o mar de fundição, de dez côvados de uma borda até à outra borda, perfeitamente redondo, e de cinco côvados de alto; e um cordão de trinta côvados o cingia em redor"* (I Reis capítulo 7, versículo 23)[1]

Mar de fundição "era uma enorme bacia, sobre um pé ornamentado, na qual lavavam as mãos e os pés os sacerdotes, na ocasião em que iam cumprir os seus deveres rituais."[2] Côvado é uma unidade de medida de comprimento adotada na época.

Exercício 1.

a) De acordo com o texto bíblico, qual é o diâmetro do *Mar de fundição?*

b) De acordo com o texto, qual é a altura do *Mar de fundição?*

c) E qual é seu perímetro?

d) De acordo com o texto, qual é a razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência?

É de se supor que se saiba, já há alguns milênios, que a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência é **um número constante**, ou seja: a relação entre os dois é sempre a mesma. O problema que se coloca desde aquela época até hoje é o de determinar um valor mais preciso desse número constante.

O símbolo usado para designar a constante obtida pela razão entre a medida do contorno de uma circunferência e seu diâmetro é a letra π, inicial da palavra grega περίμετρος, que significa contorno ou perímetro. Provavelmente William Jones[3] adotou esse símbolo pela primeira vez em 1706, mas ele foi popularizado alguns anos mais tarde pelo matemático suíço Leonhard Euler.

---

[1] BÍBLIA ONLINE. Disponível em: <https://www.bibliaonline.com.br/acf/1rs/7>. Acesso em: 2 de set. de 2021.

[2] BIBLIA.COM.BR. Disponível em: <https://biblia.com.br/dicionario-biblico/m/mar-de-fundicao/>. Acesso em: 2 de set. de 2021.

[3] PI. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Pi&oldid=60989818>. Acesso em: 23 abr. 2021.

Exercício 2. Tente encontrar o valor de π. Pegue um barbante, uma régua e uma calculadora para determinar valores experimentais aproximados para a razão entre o comprimento e diâmetro de uma circunferência. Encontre ao menos 4 objetos circulares para essa atividade e anote as contas que você fez e a que valores chegou para cada um deles. Recomenda-se fazer uma tabela como a seguinte:

Objeto	**Medida do comprimento do contorno (*C*)**	**Medida do diâmetro (*d*)**	**Razão *C/d***
Lata			
Copo			
Relógio			
Panela			
...			

Aproximações de Pi

A descoberta de que π é um número irracional só aconteceu no século XVII. Com isso, seu uso prático só é possível através de valores aproximados. Num papiro egípcio, atribuído ao escriba Ahmes, o valor da área de um círculo é calculado a partir da fração $\frac{256}{81}$, ou seja, $\pi \approx 3,16$. Os povos da mesopotâmia antiga usaram $\pi \approx \frac{25}{8}$ para calcular a área do círculo. Arquimedes usou a fração $\frac{22}{7}$ como valor para a constante π. Veja:

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} = 3,142857142857...$$

Trata-se de uma dízima periódica com período 142857. Geômetras chineses foram ainda mais longe e encontraram o valor $\frac{355}{113}$ para Pi, ainda mais preciso. Foi somente em 1761 que o francês Lambert provou que π é um número irracional.

Exercício 3. Suponha que você tem que determinar a medida do contorno de uma circunferência (C) cujo diâmetro é 5m.

a) Qual o valor de C, caso seja adotado o valor $\pi \approx 3$, dado pela bíblia?
b) Qual é o valor de C, caso seja adotado o valor $\pi \approx 3,16$, dado pelos egípcios?
c) Qual é o valor de C, caso seja adotado o valor $\frac{22}{7}$, usado por Arquimedes?
d) Qual é o valor de C, caso seja adotado o π chinês, $\frac{355}{113}$?
e) Escolha um valor para π encontrado por você no exercício 2. Usando-o, determine o valor de C.

Exercício 4.

a) Construa um quadrado inscrito numa circunferência e determine a razão $\frac{P}{d}$, em que *P* é o perímetro do quadrado e *d* é o diâmetro da circunferência.
b) Construa um hexágono regular inscrito numa circunferência e determine a razão $\frac{P}{d}$, em que *P* é o perímetro do hexágono e *d* é o diâmetro da circunferência.
c) A partir do hexágono do item anterior, construa um dodecágono regular inscrito na circunferência. Em seguida, determine a razão razão $\frac{P}{d}$, em que *P* é o perímetro do dodecágono e *d* é o diâmetro da circunferência.

O comprimento da circunferência

Admitindo que a razão entre o comprimento (*C*) e diâmetro (*d*) da circunferência é constante, temos:

$$\pi = \frac{C}{d}$$

Mas sabemos que o diâmetro da circunferência é duas vezes seu raio (*r*):

$$d = 2r$$

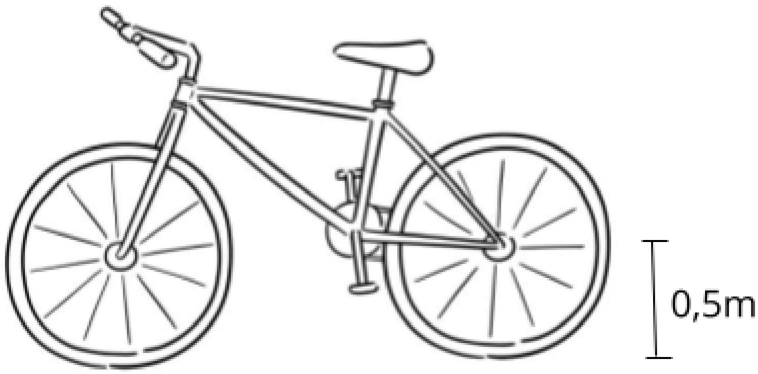
Então

$$\pi = \frac{C}{2r}$$

E por fim:

$$C = 2\pi r$$

Essa fórmula nos dá o valor do comprimento (ou perímetro) de uma circunferência quando conhecemos a medida do raio.



Por exemplo, supondo que o raio da roda de uma bicicleta mede $\frac{1}{2}$ metro, é possível calcular quantos metros a pessoa anda a cada volta completa da roda:

$C = 2 \cdot (3,14) \cdot \frac{1}{2} = 3,14$ metros.

Exercício 5. Adotando $\pi = 3,14$, calcule o comprimento aproximado das circunferências cujo:

a) Diâmetro = 15m
b) raio = 7,5m
c) Diâmetro = 10mm
d) raio = 20mm
e) diâmetro = 6cm
f) raio = 8cm

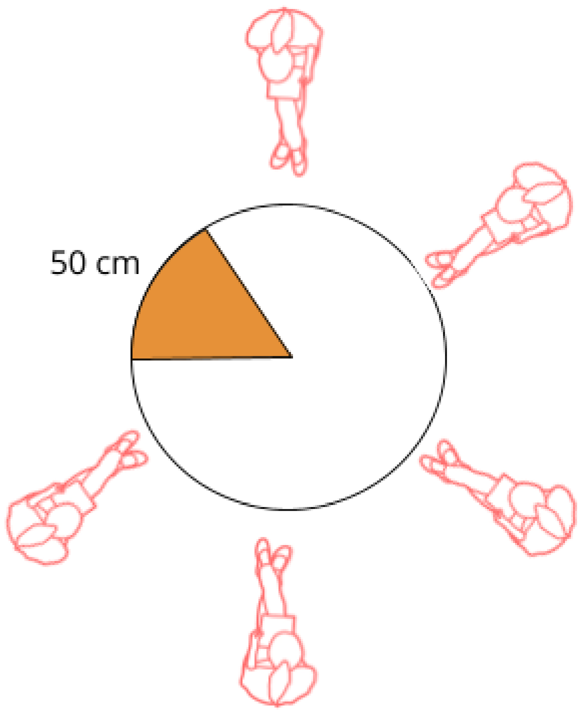
Exercício 6. Adotando $\pi = 3,14$, calcule o raio e o diâmetro das circunferências cujo perímetro é

a) 81,64 km
b) 25,12 m
c) 9,42 cm
d) 15,7 m
e) 314 cm
f) 6,28 m

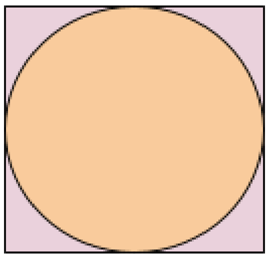
Exercício 7. Suponha que um ciclista está pedalando na marcha mais pesada de uma bicicleta cuja roda tem 28 polegadas de diâmetro. A engrenagem a que a corrente está engatada na frente tem 50 dentes, e a de trás tem 11 dentes. Isso quer dizer que a cada pedalada completa que o ciclista dá, a roda da bicicleta dá $\frac{50}{11}$ voltas completas. Nessas condições, quantas pedaladas o ciclista deverá dar para andar 1 km? Adote $\pi = 3,14$ e que uma polegada é igual a 2,54 cm.

Exercício 8. O raio médio da Terra é de aproximadamente 6400 km. Baseado nesse dado calcule o comprimento aproximado da linha do equador.

Exercício 9. Um marceneiro deve construir uma mesa redonda que comporte 6 pessoas em sua volta. Qual deve ser o raio dessa mesa para que cada pessoa possa dispor de um arco de 50 cm?



Exercício 10. Determine o comprimento de uma circunferência inscrita num quadrado de lado 2 cm.



Área do círculo

Observe o desenho. Podemos afirmar que:

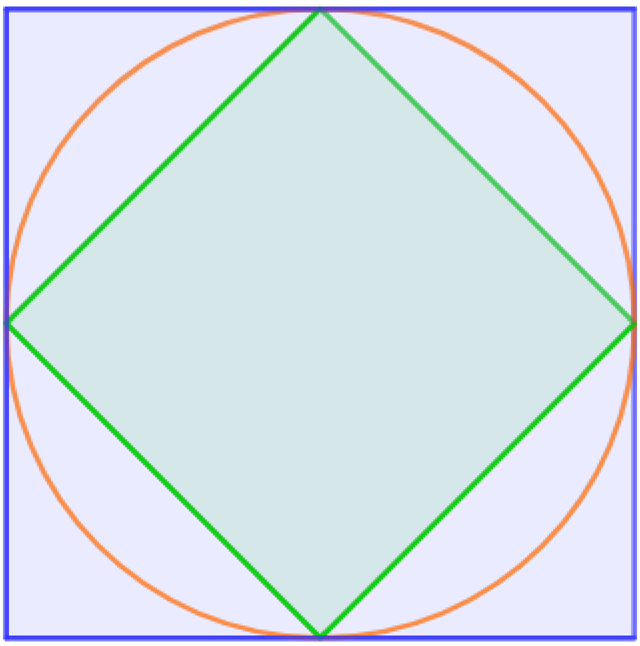
Área do quadrado inscrito (verde)

<

Área do círculo (laranja)

<

Área do quadrado circunscrito (azul)



Vamos chamar a área do círculo de A_c e o raio do círculo de r. Temos, então:

$$(\sqrt{2}r)^2 < A_c < (2r)^2$$

$$3r^2 < A_c < 4r^2$$

Pode-se chegar a um cálculo mais preciso comparando a área do círculo à área de dois octógonos, um inscrito e o outro circunscrito:

Semelhantemente:

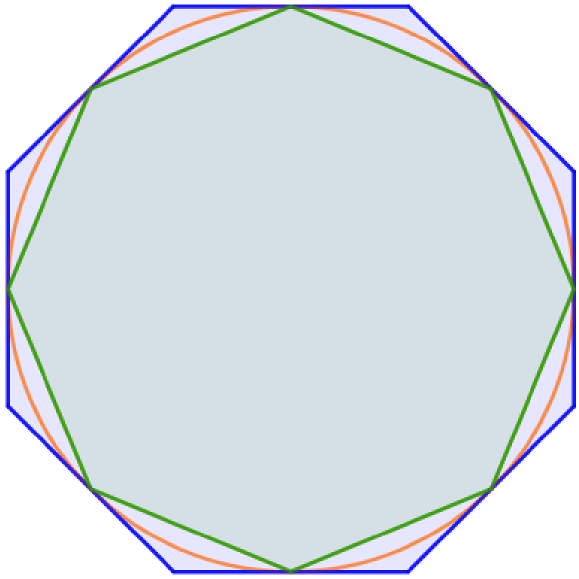
Área do octógono inscrito (verde)

<

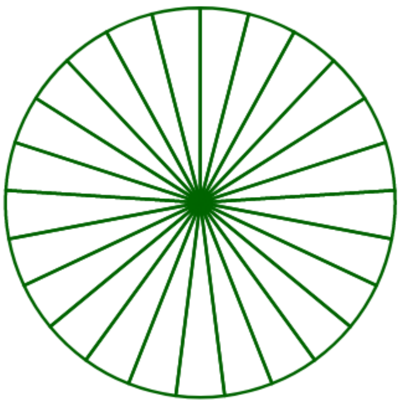
Área do círculo (laranja)

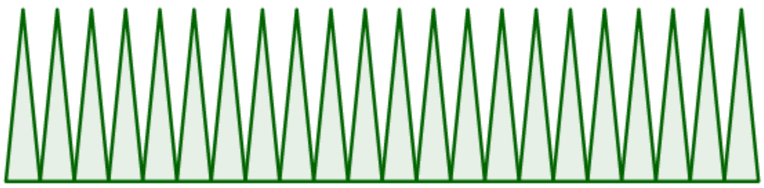
<

Área do octógono circunscrito (azul)

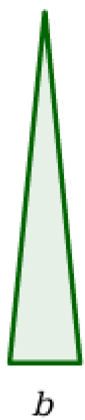


Mas agora a aproximação é melhor. Vamos imaginar agora uma situação limite, em que o círculo se confunde com um polígono regular de infinitos lados, composto por infinitos triângulos cuja altura é igual ao raio *r* do círculo e cuja base é infinitamente pequena:





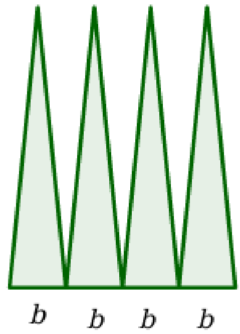
A soma da área desses triângulos é muito próxima da área do círculo.



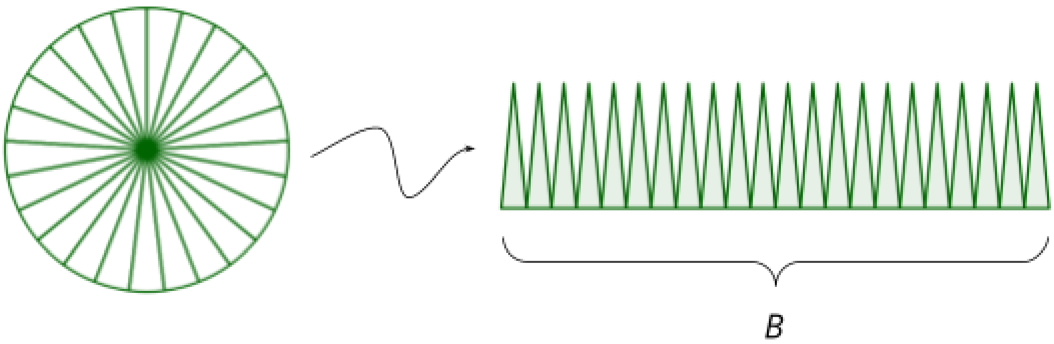
Exercício 11. Considere um dos triângulos verdes retirados de um círculo com raio *r*, como acima. Seja *b* a medida da base dele.

a) Qual é a altura desse triângulo?
b) Qual é a área desse triângulo?

c) Considere agora a figura formada por quatro desses triângulos. Qual é sua área?



d) Considere a figura formada por todos os triângulos retirados do círculo, como mostra a figura. Vamos chamar a soma das medidas de todas as bases desses triângulos de *B*. Qual é o comprimento de B?



e) Qual é a área da figura formada por todos os triângulos retirados do círculo?

Área do círculo

O objetivo do exercício anterior é ilustrar intuitivamente por que a área *A* do círculo pode ser calculada como

$$A = \pi r^2$$

Um círculo de raio 5, por exemplo, tem área $A = \pi 5^2 \approx 3,14 \cdot 25 = 78,5$.

Exercício 12. Calcule a área dos círculos de raios:

a) r = 10 cm
b) r = 3,14 m
c) r = 20 mm
d) r = 15 cm

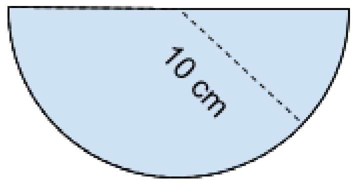
Exercício 13. Determine o valor dos raios dos círculos cujas áreas são:

a) A = 78,5 cm^2
b) A = 452,16 m^2
c) A = 113,04 mm^2
d) A = 100 m^2

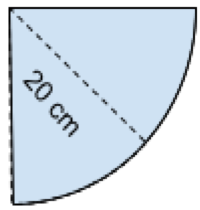
Exercício 14. O perímetro de um círculo é 9,82 cm. Determine sua área.

Exercício 15. Calcule:

a) A área do semicírculo de raio 10cm



b) A área de um quarto de círculo de raio 5cm



c) A área do setor circular indicado na figura