
Um *contra-exemplo* de separação de roupas em conjuntos

Quando arrumamos o armário, geralmente, reservamos uma gaveta para blusas, um espaço para calças, uma gaveta para meias, e assim por diante. Quando fazemos isso estamos **classificando** as roupas de acordo com alguma característica delas, formando o **conjunto** das blusas, o conjunto das calças, o conjunto das meias... Classificar é distribuir algum tipo de ser ou objeto (roupas, animais, alunos, números, figuras geométricas, etc) em classes, conjuntos ou grupos[1], por meio de algum **critério**. Outro exemplo de classificação é separar o conjunto dos números naturais em *pares* e *ímpares*. Nesse exemplo, o critério é ser par ou ímpar. A classificação também é muito comum em geometria: quando distinguimos as figuras planas poligonais das não poligonais, estamos gerando os conjuntos dos polígonos e o conjunto dos não polígonos.

Pertencimento

O conceito mais elementar que nos permite falar de conjuntos é o conceito de pertencimento. Um conjunto fica definido quando descrevemos quem são os elementos que pertencem a ele, e, consequentemente, quais elementos não lhe pertencem. Considere, por exemplo, o conjunto dos cooperados da Arco em 2021.

[1] Nesse contexto, classe, conjunto, grupo, família e coleção são sinônimos.

Dizemos que o Enzo **pertence** ao conjunto dos cooperados da Arco. Igualmente, Danilo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco. Não se pode dizer o mesmo de Jair Bolsonaro ou de Sócrates: Jair Bolsonaro não pertence ao conjunto de cooperados da Arco, nem Sócrates[2]. Quando algo pertence a um conjunto, dizemos que esse algo **é elemento** desse conjunto. Assim, poderíamos equivalentemente dizer que Enzo é elemento do conjunto dos cooperados da Arco.

Finalmente, vamos introduzir uma *notação* (ou seja, um jeito de escrever que significa a mesma coisa) para falar de pertencimento. Vamos usar o símbolo ∈. Seja A o conjunto dos cooperados da arco e E o cooperado Enzo. Então:

sinônimos

$E \in A$
Enzo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco
Enzo é elemento do conjunto dos cooperados da Arco

Igualdade

Dizemos que dois conjuntos são **iguais** (ou então, que são o mesmo) se e somente se seus elementos forem os mesmos. Ou seja, o conjunto A é igual ao conjunto B se e somente se[3] todo elemento de A for também elemento de B, e se todo elemento de B for também elemento de A. Em outras palavras, o que define um conjunto são os elementos que lhe pertencem.

Tamanho de conjuntos

O **tamanho** ou **cardinalidade** de um conjunto é o número de elementos distintos que aparecem dentro dele. Seja A o conjunto dos alunos do 9º ano da arco em 2021. Então o tamanho[4] de A é 24. Outro exemplo é o conjunto dos brasileiros, cujo tamanho é de mais ou menos 211 milhões.

Alguns conjuntos têm tamanho infinito. Ou seja, não existe nenhum número natural que consiga representar o tamanho daquele conjunto[5]. Um exemplo de conjunto de cardinalidade infinita é o conjunto dos números naturais.

[2] Note que, uma vez que definimos um conjunto a partir de um critério, então dizer que um elemento pertence a um conjunto é a mesma coisa que dizer que esse elemento satisfaz esse critério. Em um exemplo, dizer que “Enzo pertence ao conjunto dos cooperados da Arco” é o mesmo que dizer que “Enzo é um cooperado”.
[3] Essa afirmação também é conhecida como “princípio de extensionalidade”.
[4] Essa afirmação também pode ser escrita assim: $|A| = 24$
[5] Mais precisamente, dizemos que a cardinalidade de um conjunto A é infinita quando, para cada número natural *n*, existe um subconjunto de A de cardinalidade *n*.

Descrevendo conjuntos

Já sabemos que o que define um conjunto são os seus elementos. Vamos introduzir agora uma notação para **descrever** conjuntos. É um tanto simples: vamos usar um par de chaves ("{" e "}") para indicar que trata-se de um conjunto e, dentro delas, listar seus elementos, separados por vírgulas[6]. Veja:

Conjunto dos professores de matemática da Arco: {Bigode, Enzo, Seckler}
Conjunto dos professores de música da Arco: {Leo}
Conjunto dos professores de Educação Moral e Cívica da Arco: {}

Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$): {0, 1, 2, 3, 4, ...}
Conjunto dos número naturais menores que 3: {0, 1, 2}
Conjunto dos números naturais menores que 10 e maiores que 5: {6, 7, 8, 9}
Conjunto dos números naturais menores que 10 e maiores que 20: {}

Lembre-se que dois conjuntos são iguais se seus elementos forem os mesmos. Então temos que

{Bigode, Enzo, Seckler} = {Seckler, Bigode, Enzo}

ou então, esses dois conjuntos são *o mesmo*. Isso quer dizer que a ordem em que os elementos aparecem dentro das chaves não importa.

Deve parecer estranho especificar o conjunto dos professores de Educação Moral e Cívica na Arco, já que essa disciplina não é oferecida na escola, portanto *não há professores que satisfaçam esse critério*. O conjunto resultante não poderá conter nenhum elemento! Logo, o conjunto especificado é o **conjunto vazio**, denotado simplesmente por {} ou por $\emptyset$. Analogamente, note que não existe nenhum número que seja menor do que 10 e que seja maior do que 20. Logo, o conjunto especificado por esse critério deve também ser o conjunto vazio.

Exercício 1. Reflita sobre o processo de classificação no seu cotidiano. Dê dois exemplos de situações no dia a dia (sem ser na aula de matemática e sem repetir o exemplo do armário do início da atividade) em que você classificou alguma coisa. Nos dois exemplos, descreva o critério utilizado e os conjuntos resultantes dessa classificação.

Exercício 2.

a) Descreva o conjunto dos professores de artes da Arco;
b) Descreva o conjunto dos professores de Etiqueta da Arco;
c) Descreva o conjunto dos números naturais **n** que satisfaça simultaneamente as

[6] Algumas vezes vamos usar o ponto e vírgula (;) para separar os elementos, para não confundir com a vírgula que separa a parte inteira das casas decimais.

três condições abaixo:

i) $n < 6$
ii) $n > 5$
iii) $n \leq 4$

Exercício 3. Para todas as respostas do exercício 2, diga qual é o tamanho do conjunto que você descreveu.

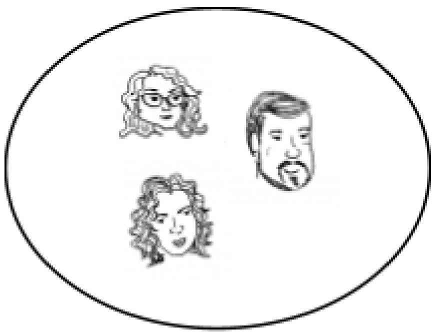
Exercício 4. Considere o conjunto A de todos o números naturais pares e o conjunto B de todos os números naturais múltiplos de 2. É correto dizer que $A = B$? Justifique.

Exercício 5[7]**.** Seja B um conjunto qualquer. Considere o conjunto $A_1 = \{B, B\}$. Qual é a cardinalidade de A_1? Considere também o conjunto $A_2 = \{B, B, B\}$ e $A_3 = \{B, B, B, B\}$. Qual é a diferença entre A_1, A_2e A_3?

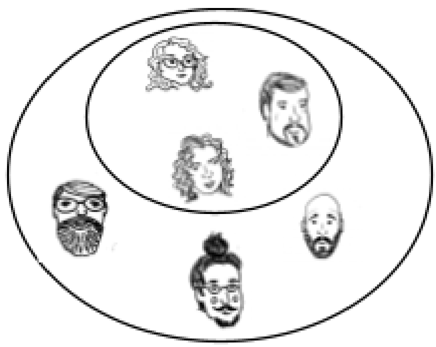
Inclusão

Informalmente, um conjunto é subconjunto de outro quando o primeiro "faz parte" do segundo. Por exemplo, considere o *conjunto de professores de humanas* da Arco em 2021 e o *conjunto de professores de história* da Arco em 2021. O segundo conjunto "faz parte" do primeiro, afinal, a história é uma disciplina de humanas.

professores de humanas



Professores de história



professores de história são um **subconjunto** dos professores de humanas

[7] Dica: releia a seção "igualdade"

Note que todos os elementos do conjunto dos professores de história também são elementos do conjunto dos professores de humanas. É isso que quer dizer “fazer parte”!

Dizemos que um conjunto A é **subconjunto**[8] de um conjunto B se todo elemento de A for também elemento de B. Para representar essa ideia, vamos usar a seguinte notação: $A \subseteq B$.

Exercício 6. Descreva outros dois casos do dia a dia em que um conjunto é subconjunto de outro.

Exercício 7. Identifique os **conjuntos**, **elementos**, relações de **inclusão** e **pertencimento** utilizados nos argumentos:

a) Todos os animais são mortais
O papagaio é um animal
____
O papagaio é mortal

b) Todos os homens são feitos de queijo
Sócrates é homem
____
Sócrates é feito de queijo

c) Toda regra tem exceção
A proposição anterior é uma regra
____
Existe regra sem exceção

Exercício 8. Considere as seguintes definições, no contexto da geometria plana:

- A é o conjunto dos polígonos;
- T é o conjunto dos triângulos;
- b é um ponto;
- F é o conjunto das figuras geométricas;
- q é um quadrado;
- R é o conjunto dos retângulos;
- L é o conjunto dos losangos;
- c é um quadrilátero

[8] Também podemos dizer que o conjunto A está **incluído** no conjunto B.

- d é uma reta;
- P é o conjunto de todos os pontos;

Descreva no mínimo seis relações de pertencimento ou de inclusão entre os objetos acima.

Exercício 9[9]. Considerando os seguintes conjuntos,

$A = \{1\}$
$B = \{1, \{1\}\}$
$C = \{1, 2\}$
$D = \{1, 2, \{1\}\}$
$E = \{1, \{1, \{1\}\}\}$

determine quais das sentenças abaixo são verdadeiras:

i) $A \in B$
ii) $A \subseteq B$
iii) $B \in E$
iv) $B \subseteq E$
v) $C \in D$
vi) $C \subseteq D$
vii) $B \subseteq D$

Conjuntos de múltiplos

Considere os conjuntos formados por múltiplos de números naturais. Por exemplo, considere o conjunto dos múltiplos de 3. Vamos chamá-lo de $M(3)$. Assim,

$$M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$$

Em geral, $M(n)$ é o conjunto dos múltiplos de um número natural n. Veja outro exemplo:

$$M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, ...\}$$

Exercício 10.

a) Existe algum número que é elemento de todos os conjuntos dos múltiplos? Ou seja, existe algum número z tal que pertence a $M(n)$, qualquer que seja n?

[9] Desafio: Construa um conjunto A, diferente do conjunto vazio, tal que todo elemento de A é subconjunto de A. Dê dois exemplos.

b) Encontre um conjunto de múltiplos que seja subconjunto de outro conjunto de múltiplos. Ou seja, encontre m e n tais que $M(m) \subseteq M(n)$. Qual é a relação entre m e n ?

c) Mostre que se $a, b \in M(n)$, então $a + b \in M(n)$, para todo n.

d) Mostre que se $a \in M(n)$ e k é um número natural, então $a \cdot k \in M(n)$, para todo n.

União

Podemos criar novos conjuntos a partir de conjuntos dados de diversas maneiras. Por exemplo, "juntando" dois deles. A **união** de dois conjuntos A e B é o conjunto que contém todos os elementos que pertencem a A ou que pertencem a B. Usaremos a seguinte notação para indicar a união de A e B:

$$A \cup B$$

Veja um exemplo: seja A o conjunto dos estudantes da Arco, EF o conjunto dos estudante do Ensino Fundamental II da Arco, e EM o conjunto dos estudantes do Ensino Médio da Arco. Então:

$$A = EM \cup EF$$

Seja também EM_1 o conjunto dos estudantes da 1ª série o médio, EM_2 da 2ª série, e assim por diante. Então:

$$EM = EM_1 \cup EM_2 \cup EM_3$$

$$EF = EF_6 \cup EF_7 \cup EF_8 \cup EF_9$$

Intersecção

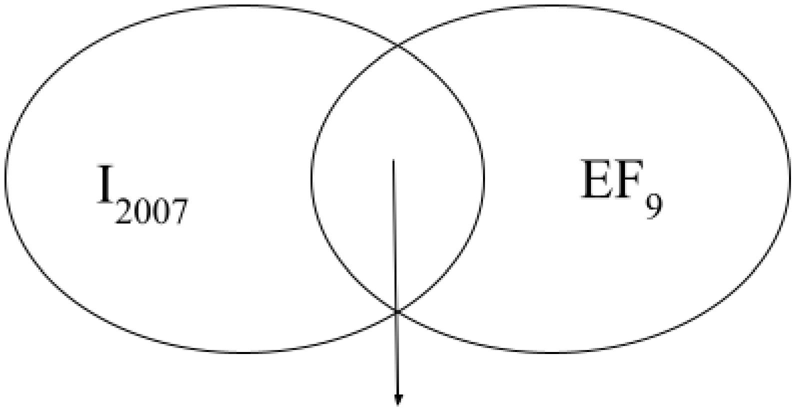
Ao invés de "juntar" dois conjuntos, podemos também "pegar o que eles têm em comum". A **intersecção** entre dois conjuntos A e B é o conjunto que contém os elementos que são elementos tanto de A quanto de B. Usaremos a seguinte notação para denominá-lo:

$$A \cap B$$

Veja um exemplo: considere que I_{2007} é o conjunto dos estudantes da Arco que nasceram no ano de 2007. Considere o conjunto:

$$EF_9 \cap I_{2007}$$

Ele é o conjunto de estudantes do 9ª que são de 2007! Repare que ele não corresponde nem à classe do 9º ano inteira nem ao conjunto dos alunos da arco que nasceram em 2007, mas sim à parte em comum entre esses dois conjuntos.



$I_{2007} \cap EF_9$

Exercício 11. Descreva os conjuntos:

a) $M(2) \cup M(4)$
b) $M(2) \cap M(4)$
c) $M(2) \cup M(3)$
d) $M(2) \cap M(3)$
e) $M(3) \cup M(9)$
f) $M(3) \cap M(9)$

Conjuntos numéricos

O conjunto dos números naturais

O conjunto dos números naturais é o mais simples entre os que nos interessam aqui. Através de seus elementos, as crianças têm seus primeiros contatos com a matemática, e foram os primeiros a aparecerem na história da humanidade. Também são conhecidos como *números para contar*: um, dois, três, quatro... Os matemáticos acrescentaram o número 0 e o denominaram conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Exercício 12. Dê dois exemplos de subconjuntos de $\mathbb{N}$ com 6 elementos que satisfaçam simultaneamente às seguintes condições:

i) Todos maiores que 100 e menores que 200;
ii) Não podem ser múltiplos de 5;
iii) Dois elementos quaisquer não podem satisfazer à equação $x + y = 300$

Exercício 13. Aponte um subconjunto de cardinalidade infinita em que qualquer elemento, com exceção do menor de todos, pode ser obtido a partir da soma de outro elemento com 3.

Exercício 14. Um conjunto se diz **fechado** em relação à adição se, somando quaisquer dois elementos desse conjunto, o resultado também pertence a esse conjunto. De forma análoga, o mesmo se diz sobre um conjunto ser fechado em relação à multiplicação.

Em outras palavras, um conjunto A é fechado em relação à adição se e somente se, para todo $x, y \in A$, for verdade que $x + y \in A$.

a) O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado em relação à adição? E em relação à multiplicação?
b) Forneça um subconjunto de $\mathbb{N}$ que seja fechado em relação à adição.
c) Forneça um subconjunto de $\mathbb{N}$ que seja fechado em relação à multiplicação.
d) Forneça um subconjunto de $\mathbb{N}$ que não seja fechado em relação à adição nem à multiplicação.
e) Existe algum subconjunto de $\mathbb{N}$ de cardinalidade finita fechado em relação à adição? Se sim, forneça-o.
f) Existe algum subconjunto de $\mathbb{N}$ de cardinalidade finita fechado em relação à multiplicação? Se sim, forneça-o.
g) O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado em relação à subtração?
h) Encontre alguma operação que não seja a adição, multiplicação e subtração em relação à qual o conjunto dos naturais *não* seja fechado.
i) Encontre alguma operação que não seja a adição, multiplicação e subtração em relação à qual o conjunto dos naturais seja fechado.

Exercício 15. Dizemos que um elemento de um conjunto é **neutro** em relação a uma operação quando fazer essa operação entre ele e qualquer outro elemento do conjunto nos dá esse outro elemento mesmo. Ou seja, fazer a operação com esse elemento é a mesma coisa que não fazer nada.

Por exemplo, o elemento neutro da adição é o 0. Isso porque qualquer número mais zero é igual a ele mesmo.

a) Qual é o elemento neutro da multiplicação.
b) E o da divisão?
c) E o da subtração?

O conjunto dos números inteiros

Juntando os elementos do conjunto dos números naturais com seus opostos[10], obtemos um novo conjunto: o dos números inteiros.

$$\mathbb{Z} = \{... - 5, - 4, - 3, - 2, - 1, 0\} \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

O símbolo comumente utilizado para identificar os números inteiros é o Z maiúsculo, inicial da palavra *Zahl*, que em alemão significa “número”.

Exercício 16.

a) Qual a cardinalidade de $\mathbb{Z}$?
b) Dê três exemplos de subconjuntos infinitos de $\mathbb{Z}$.
c) Quantos subconjuntos tem o conjunto $\mathbb{Z}$?
d) Decida se a seguinte proposição é verdadeira: “existe um elemento em $\mathbb{Z}$ que é menor que qualquer outro número”
e) Faça o mesmo para essa: “existe um elemento em $\mathbb{N}$ que é menor que qualquer outro número”

Exercício 17. Verifique se $\mathbb{Z}$ é fechado para cada uma das 4 principais operações (soma, subtração, multiplicação e divisão).

Exercício 18.

a) Forneça um subconjunto de $\mathbb{Z}$ fechado em relação à adição
b) Forneça um subconjunto de $\mathbb{Z}$ fechado em relação à subtração
c) Forneça um subconjunto de $\mathbb{Z}$ fechado em relação à multiplicação
d) Forneça um subconjunto de $\mathbb{Z}$ fechado em relação à divisão

Equações em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Z}$

A solução de uma equação pode ter resultados diferentes, dependendo do conjunto com que estamos trabalhando. Considere a equação $x + 2 = 4$, para $x \in \mathbb{N}$. Ela tem solução, já que $x = 2$ é um elemento de $\mathbb{N}$. Nesse caso, dizemos que trata-se de uma **solução em** $\mathbb{N}$.

A equação $x + 2 = 4$, para $x \in \mathbb{Z}$ também tem solução, pois 2 também é um número inteiro.

Considere agora a equação $x + 2 = 1$, com $x \in \mathbb{N}$. Essa equação não tem solução, já que não existe nenhum número natural que a satisfaça (verifique). Se, no entanto, considerarmos $x \in \mathbb{Z}$, então a equação tem solução: $x =- 1$.

[10] Dizemos que um número *a* é **oposto** a *b* se a = -b

Exercício 19. Indique quais são as soluções das equações abaixo, considerando que $x \in \mathbb{N}$. Em seguida, faça o mesmo, considerando que $x \in \mathbb{Z}$.

a) $2x - 4 = 0$
b) $3x - 1 = 4$
c) $2x + 1 = 5$
d) $2x - 1 = 1$
e) $x + 5 = 4$
f) $2x + 1 = 0$
g) $x^2 - 9 = 0$
h) $(x - 4)^2 = 25$
i) $(-6 + x)^2 - 9 = 0$
k) $2x^2 - 4x = 0$
j) $x^2 + 10x + 25 = 16$

Definindo conjuntos por compreensão

Até agora definimos conjuntos de dois modos. Ou usamos o português, por exemplo: "O conjunto dos números naturais pares", ou então usamos a notação com chaves, exemplo: $\{0, 2, 4, 8, 10, ...\}$. O primeiro sofre de não ser enxuto. O segundo sofre de falta de precisão em se tratando de conjuntos de cardinalidade infinita (nem sempre fica preciso o que querem dizer as reticências).

Vamos introduzir uma nova notação que representa conjuntos por **compreensão**. Vamos usar as mesmas chaves, mas ao invés de listar os elementos, vamos descrevê-los através de uma propriedade. Por exemplo, considere que B é o conjunto de números inteiros menores que 5. Podemos representar B da seguinte maneira:

$$\{x \in \mathbb{Z}: x < 5\}$$

Se quisermos representar o conjunto dos naturais maiores ou iguais a 6, poderemos dizer:

$$\{x \in \mathbb{N}: x \geq 6\}$$

Outro exemplo é o conjunto dos cooperados da Arco em 2021. Poderíamos representá-lo assim:

$$\{c: c \text{ é } cooperado\ da\ arco\ em\ 2021\}$$

Podemos ler os dois pontos (:)[11] como "tais que". Assim, o conjunto acima poderia ser lido da seguinte forma: "O conjunto dos números naturais *x* tais que *x* é maior ou igual a 6". Veja como poderíamos descrever o conjunto dos números inteiros pares:

$$\{x \in \mathbb{Z}\colon \, existe\ k \in \mathbb{Z}\, tal\ que\ 2k = x\}$$

Exercício 20.

a) Represente o conjunto dos números naturais menores que 5 de três jeitos diferentes.
b) Represente por compreensão o conjunto dos números inteiros menores que 100.
c) Represente por compreensão o conjunto dos países da américa do sul
d) Represente por compreensão o conjunto *{tipuana, seringueira, resedá, pau-brasil, ...}*
e) Represente por compreensão o conjunto dos números quadrados (isto é, números naturais que podem ser escritos como um outro número natural ao quadrado)
f) Represente por compreensão o conjunto dos números naturais ímpares.
g) Represente por compreensão o seguinte conjunto:

{ a : a é triângulo } ∪ { a : a é quadrado } ∪ { a : a é pentágono } ∪
{ a : a é hexágono } ∪ { a : a é heptágono } ∪ ...

Exercício 21. Seja A um conjunto. Seja B outro conjunto dado por $B = \{i \in A\colon i \neq i\}$.

a) Quantos elementos tem o conjunto B?
b) Forneça outra representação por compreensão para B.

O conjunto dos números racionais

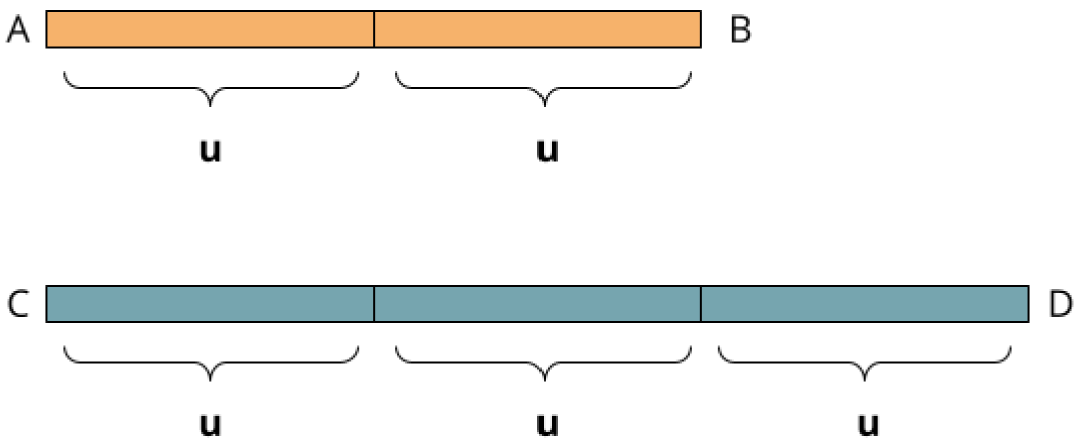
Depois de ter criado os números e desenvolvido vaŕios sistemas de contagem e numeração, o homem deparou com um problema que não podia ser resolvido com os número de que dispunha. O problema da **medida**. Abaixo, vemos uma passagem de Heródoto[12], um historiador grego que viveu no século V a.C.

> *Disseram-me que este rei [Sesóstris] tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Se a porção de algum fosse diminuída pelo rio [Nilo], ele que fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra, que ao mesmo tempo o rei enviaria medidores ao local e faria medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado em*

[11] É comum também usar uma barra vertical (|) ao invés dos dois pontos. Ambos têm o mesmo significado.
[12] Heródoto é conhecido como o pai da História.

terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos gregos.

Se a geometria nasceu como sugere Heródoto, é possível que as frações também tenham surgido do problema da medida. Veja: um segmento AB pode ser medido com a unidade **u**.



Mas como medir um segmento PQ muito longo ou muito curto, tendo **u** como unidade? Problemas desse tipo levaram ao surgimento dos números **racionais**.

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais inclui todos os números inteiros e mais os números representados por frações (positivas e negativas). Em outras palavras, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é formado por todos os números que podem ser colocados na forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}: a, b \in \mathbb{Z} \; e \; b \neq 0\}$$

Exercício 22. Verifique se $\mathbb{Q}$ é fechado para cada uma das 4 principais operações (soma, subtração, multiplicação e divisão).

Exercício 23. Verifique se $\mathbb{Q}$ é fechado em relação à potenciação e à radiciação. Ou seja, verifique se um número racional qualquer elevado a outro racional qualquer é sempre um número racional. Em seguida, verifique se a raiz *r*-ésima de um número racional qualquer, sendo *r* um racional qualquer, é também um racional.

Exercício 24. Compare os números racionais abaixo, usando os sinais de <, >, ou =.

a) $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$

c) $\frac{8}{9}$ e $\frac{7}{8}$

d) $\frac{5}{100}$ e $\frac{4}{99}$

e) $\frac{87}{91}$ e $\frac{82}{86}$

f) $\frac{(a+1)}{15}$ e $\frac{a}{14}$

a) $\frac{998}{999}$ e $\frac{98}{99}$

Exercício 25. Volte ao exercício **19** e indique quais equações têm soluções racionais mas que não são inteiras.

Exercício 26. Forneça a representação decimal das frações abaixo.

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{5}{4}$

c) $\frac{7}{10}$

d) $\frac{2}{10}$

e) $\frac{-3}{2}$

f) $\frac{26}{65}$

g) $\frac{16}{40}$

h) $\frac{5}{2}$

i) $\frac{-13}{5}$

j) $\frac{3}{9}$

k) $\frac{-2}{3}$

Exercício 27. Solucione as equações abaixo, considerando que $x, y \in \mathbb{Q}$.

a) $x + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$

b) $y + \frac{14}{9} = \frac{5}{3}$

c) $x - \frac{6}{5} = \frac{-3}{10}$

d) $0,45x + 3 = 14,25$

e) $\frac{3}{4}x + 2 = \frac{5}{2}$

f) $\frac{81}{180}y + 3 = \frac{57}{4}$

Números irracionais

Primeiro, vimos os números naturais, os mais elementares, usados para contar. A eles acrescentamos os números negativos, formando o conjunto dos números inteiros. Esse passo tem a ver com a possibilidade de subtrair quaisquer dois números. Depois passamos a falar nos “números quebrados”, ou melhor, os números que podem ser escritos como a divisão de dois números inteiros. Isso tem a ver com a possibilidade de dividir quaisquer dois números. Será que existem números que não pertencem a nenhum dos conjuntos acima?

Se você leu o título da seção, deve imaginar que sim. E um dos jeitos de mostrar isso é se referindo a uma outra operação ainda, diferente da soma, subtração, multiplicação e divisão: essas já vimos que podemos usar indiscriminadamente no conjunto dos racionais. Passamos a mostrar que os racionais não são fechados em relação à **radiciação**. Para isso, vamos mostrar que o número $\sqrt{2}$ não pertence ao conjunto dos racionais.

Vamos começar apresentando três fatos:

1. Se $p \in \mathbb{Z}$ é par, então p^2 também é par.
2. Se $p \in \mathbb{Z}$ é ímpar, então p^2 também é ímpar.
3. Se $p \in \mathbb{Z}$ pode ser escrito como $2k$, para algum número $k \in \mathbb{Z}$, então p é um número par.

Antes de continuar, verifique que essas afirmações são verdadeiras.

Em seguida, uma observação sobre essa demonstração. Vamos usar um tipo de argumentação dita “prova por contradição”, que consiste nas seguintes etapas:

- Suponha algo absurdo (geralmente, o contrário do que você quer mostrar);
- Desenvolva a demonstração até chegar numa contradição;
- Conclua o contrário do que você supôs de início.

Aqui vamos querer mostrar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Portanto, vamos começar supondo o contrário disso, ou seja, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Mas isso quer dizer que existem dois números inteiros $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Além disso, vamos supor que a fração $\frac{p}{q}$ está em sua forma reduzida (ou seja: não é possível simplificá-la mais). Por causa disso, sabemos que não pode ser que p e q sejam dois números pares: se o fossem, então $\frac{p}{q}$ não estaria em sua forma reduzida. Retomando então o que temos até aqui:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

Pelo menos um entre p e q são ímpares.

Acompanhe o raciocínio:

Se $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, então $\frac{p^2}{q^2} = 2$

Multiplicamos os dois lados por q^2, obtendo $p^2 = 2q^2$.

Mas isso quer dizer que p^2 é um número par (veja o fato 3, acima). Mas se p^2 é par, então p também o deve ser (já que se p fosse ímpar, p^2 seria ímpar também, como indica o fato 2 acima). Se p é um número par, podemos escrever $p = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Portanto

$p^2 = 2q^2$

$(2k)^2 = 2q^2$

$4k^2 = 2q^2$

$2k^2 = q^2$

Mas isso quer dizer que q^2 é um número par. Pelo mesmo raciocínio acima, temos que q é um número par também. Mas isso é uma contradição! Lembre-se que havíamos suposto que ao menos um entre q e p eram ímpares. Como chegamos numa contradição, podemos concluir que a suposição absurda que fizemos (de que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) deve estar errada. Logo, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Sabemos que existem, então, números que não podem ser escritos como a divisão de dois números inteiros. A existência de números não racionais ocupou filósofos e matemáticos durante cerca de 2500 anos: dos pitagóricos até o século XIX. Os pitagóricos, escola de pensamento grega originada no século VI a.C., entraram em crise tão logo descobriram a existência de segmentos cujos comprimentos não podiam ser expressos como a razão entre números inteiros. Vamos chamar o conjunto dos números que não são racionais de **conjunto dos números irracionais**, denotado **Ir**.

É natural que surjam questões como as seguintes sobre esses números:

- Quantos são os números irracionais?
- Como são representados?
- Que números são irracionais?
- Como se distribuem?

Atualmente sabemos responder a maioria delas, por exemplo:

- O conjunto Ir tem cardinalidade infinita;

- Um número irracional tem expansão decimal infinita e não periódica.

  Ex: $\sqrt{2} = 1.4142135623730951...$ A sequência de números depois da vírgula não contém nenhum padrão que se repete. Isso é diferente da expansão decimal de um número racional, que, se for infinita, será periódica:

  $\frac{1}{3} = 0,33333...$

  (note que o 3 se repete!)

  $\frac{3}{7} = 0,4285714285714285...$

  (note que a sequência 428571 se repete!)

  - Toda raiz de um número primo é um número irracional. Ou seja, se $p \in \mathbb{Q}$ é primo, então $\sqrt{p} \in Ir$.

O conjunto dos irracionais também não é fechado em relação à soma e subtração. Por exemplo, é verdade que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in Ir$, mas também temos que $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) \notin Ir$. Algo semelhante acontece na multiplicação.

Exercício 28.

a) Escreva dois números irracionais cuja soma é racional;
b) Escreva dois números irracionais cuja diferença é racional;
c) Escreva dois números irracionais cujo produto é racional;
d) Escreva dois números irracionais cujo quociente é racional.

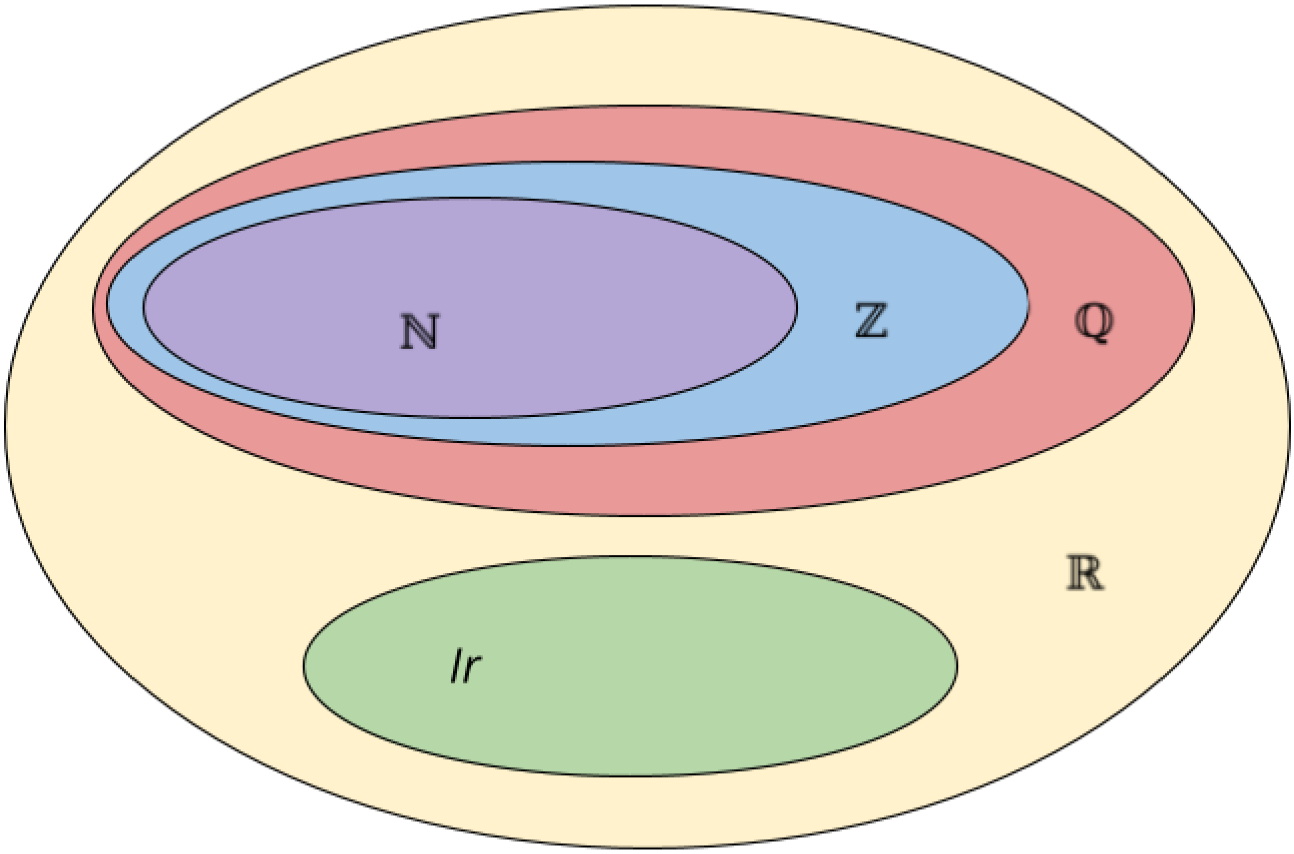
O conjunto dos números reais

Reunindo todos os números racionais e irracionais, obtém-se um novo conjunto denominado **conjunto dos números reais**, denotado por $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup Ir$$

Reunindo tudo que estudamos sobre conjuntos numéricos até aqui, temos o seguinte:

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
- $Ir \subseteq \mathbb{R}$
- $Ir \cup \mathbb{Q} = \emptyset$



Exercício 29. Resolva as seguintes equações, considerando que $k \in \mathbb{Q}$:

a) $k^2 = 9$
b) $k^2 = 7$
c) $3k^2 = 33$
d) $27 = k^2 + 2$
e) $k^2 - 2 = 27$
f) $(k + 1)^2 = 16$
g) $2(3 + k)^2 = 26$
h) $k^2 + 5k = 0$
i) $3k + 6k^2 + 1 = 1$
j) $k^2 + \sqrt{7}k = 0$
k) $k^2 =- 5k$

Exercício 30. Resolva as mesmas equações do exercício anterior, mas agora considerando que $k \in \mathbb{R}$.