# 03 - Congruência

Matemática

9º ano abril/2021

Nessa atividade vamos investigar a ideia de igualdade entre figuras. Veja as duas figuras abaixo:

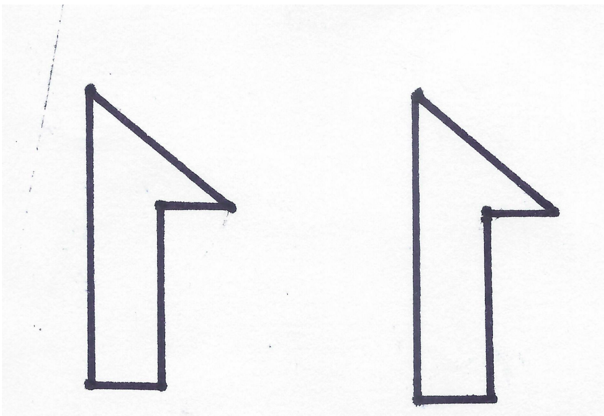


Figura 1

Parece razoável dizer que elas são iguais. Elas têm a mesma forma e o mesmo tamanho. E essas duas?

Parece razoável também que elas sejam iguais, afinal, parece que a gente

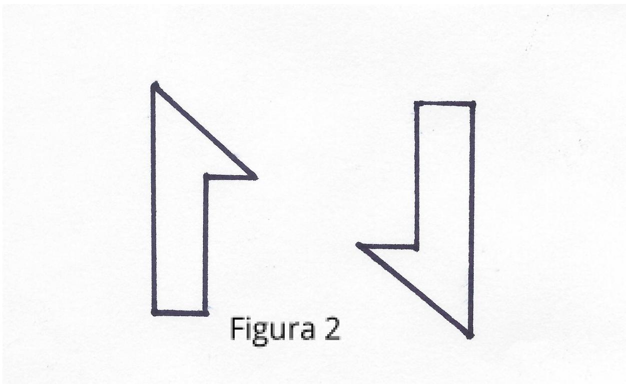


Figura 2

só girou uma delas e chegou na outra. E essas?

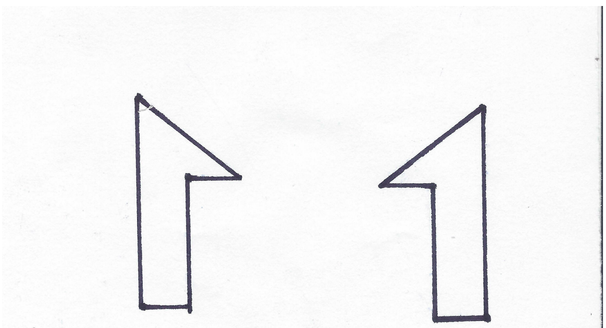


Figura 3

Aqui já ficamos mais em dúvida. Por um lado, parece que elas têm a mesma forma, porque se eu virar uma figura eu chego na outra. Mas uma aponta para a direita e outra pra esquerda... E essas?

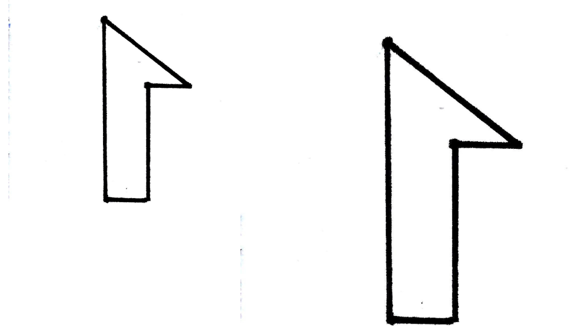


Figura 4

Bom, elas ainda são parecidas, mas uma é maior que a outra. Será que elas são iguais?

## Congruência

Em vez de ficar tentando responder essa pergunta, que parece não ter uma resposta definitiva, vamos apresentar outro conceito. Em geometria, dizemos que duas figuras são **congruentes** se elas têm a mesma forma e o mesmo tamanho. As figuras 1 a 3 acima mostram, cada uma, duas figuras congruentes. A figura 4 mostra duas figuras não congruentes, pois têm tamanhos diferentes.

**Exercício 1.** Faça a seguinte atividade no *Geogebra*: geogebra.org/m/gadrnmzm. Registre sua solução com *printscreens* e poste-os na plataforma do curso.

Ao fazer o exercício 1 talvez você tenha percebido que, sob algumas **restrições**, não é possível formar triângulos não congruentes. Por exemplo, se dois triângulos têm **os lados correspondentes congruentes**, não tem como eles **não** serem congruentes — ou seja, eles devem ser congruentes.

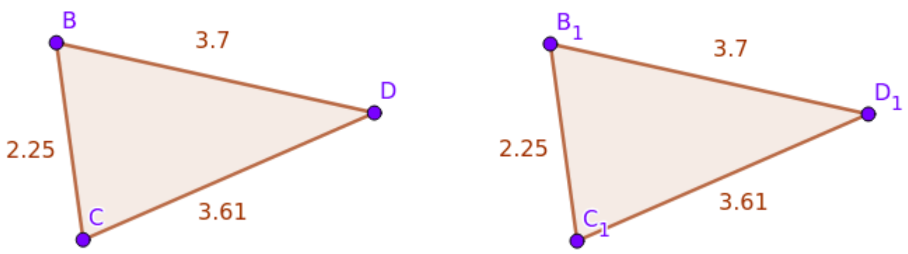



Figura 5

**“(...) lados correspondentes congruentes”... quê??**

**(i)** Lados também são figuras, logo, podem ser congruentes: basta que tenham a mesma medida. Em outras palavras: *dois lados são congruentes se têm a mesma medida.*

**(ii)** Falar em “lados correspondentes” indica que estamos comparando um lado de cada triângulo (e não lados de um mesmo triângulo). Por exemplo, na figura 5, o lado BC corresponde ao $B_1C_1$, o lado CD corresponde ao $C_1D_1$, e assim por diante.

Recomendo reler até ter certeza de que você entendeu.

Note que essa afirmação tem a forma premissa-conclusão. Poderíamos reescrevê-la usando a seguinte notação:

ABC é um triângulo
DEF é um triângulo
Os lados correspondentes de ABC e DEF são congruentes

---

ABC é congruente a DEF

Figura 6

Ó que é um triângulo isósceles mesmo?

Agora podemos usar o fato descoberto em outras argumentações. Por exemplo, considere a afirmação: “*Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes*”

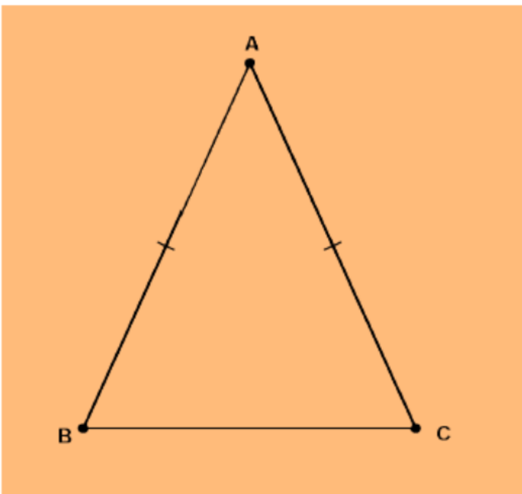



Figura 7

Por enquanto, não sabemos se essa afirmação é verdadeira ou não (apesar de *parecer* para um ou outro, só de olhar, que é verdade). Passamos agora a **demonstrá-la**. Se a demonstração estiver correta, saberemos que a afirmação é verdadeira.

**Demonstração.** Considere os dois triângulos $ABC$ e $ACB$ (um está "virado" em relação ao outro). Sabemos que $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AC} = \overline{AB}$ e que $\overline{BC} = \overline{BC}$. Logo, os dois triângulos são congruentes. Logo, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são congruentes.

**Exercício 2.** Reescreva a demonstração na forma de uma sequência de premissas e conclusões, como na figura 6.

## Os casos de congruência de triângulos

Podemos considerar que cada triângulo tem seis propriedades ou informações que o diferenciam dos demais triângulos: três medidas de lado e três medidas de ângulo. Sabemos que se dois triângulos são congruentes, então todas essas medidas também serão congruentes.

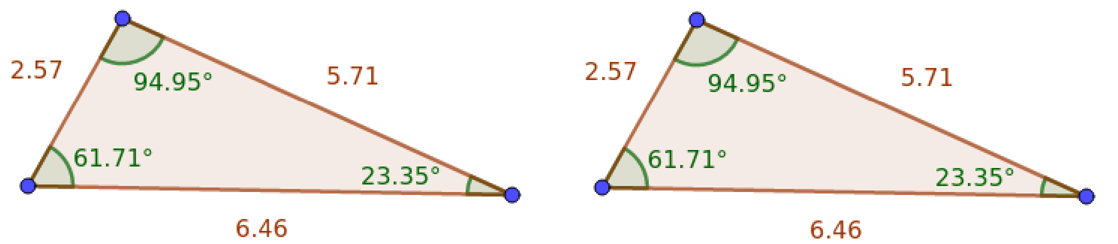



Figura 8: Dois triângulos congruentes têm todos os lados e ângulos correspondente congruentes

O que descobrimos, no entanto, é que podemos **concluir** se dois triângulos são congruentes ou não a partir de **menos informações**. Na seção passada vimos que dois triângulos têm lados correspondentes congruentes, já então eles são congruentes. É isso que mostra a figura 6. O objetivo aqui é passar de uma situação em que temos menos informações — de início, só sabemos que os lados correspondentes são congruentes — para uma situação em que temos mais informações — ao final, sabemos também que os ângulos são congruentes.

Vamos chamar esse *caso de congruência* de **LLL** (lado-lado-lado), já que partimos de informações sobre três lados. Existem outros casos além desse, ou seja, existem outros conjuntos de informações sobre dois triângulos que nos permitem decidir pela congruência deles.

Se soubermos que dois triângulos têm dois lados correspondentes congruentes, e que os ângulos entre esses lados também são congruentes, então podemos concluir que os dois triângulos são congruentes. Chamamos esse caso de **LAL** (lado-ângulo-lado).

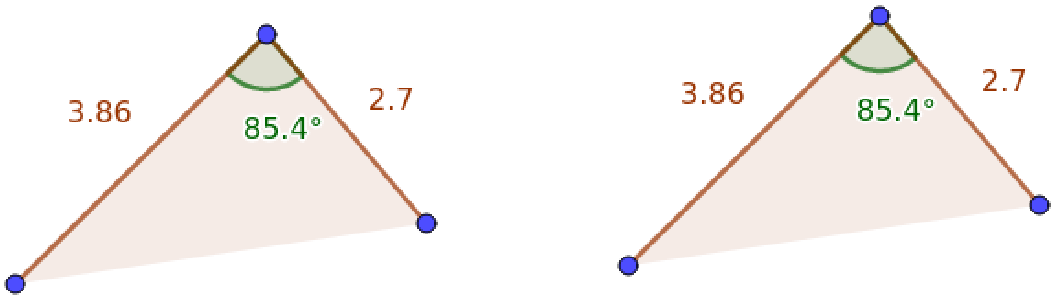



Figura 9: o caso **LAL**

Se soubermos que dois triângulos têm dois ângulos correspondentes congruentes, e os lados entre esses dois ângulos também forem congruentes, então podemos concluir que os dois triângulos são congruentes. Chamamos esse caso de **ALA** (ângulo-lado-ângulo):

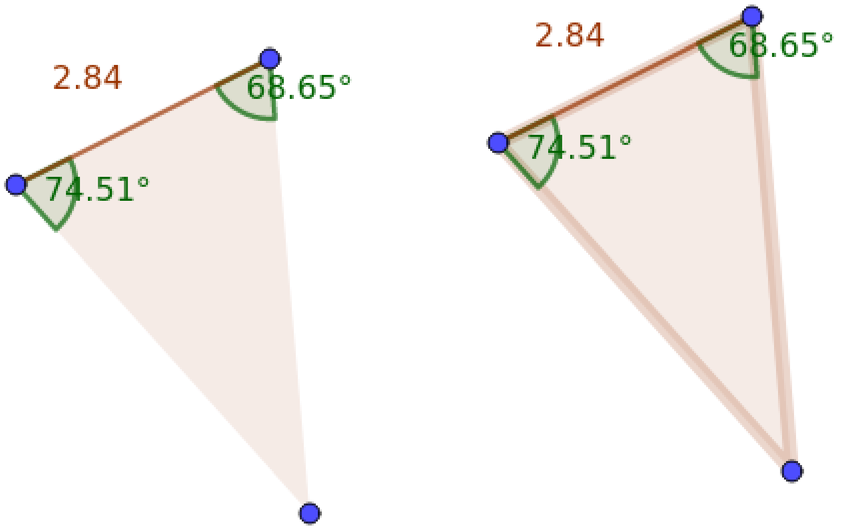



Figura 10: o caso **ALA**

Por fim, se soubermos que dois triângulos têm um lado correspondente congruente, o ângulo oposto a esse lado congruente e ainda outro ângulo correspondente congruente, então podemos concluir que os dois triângulos são congruentes. É o caso **LAA**.

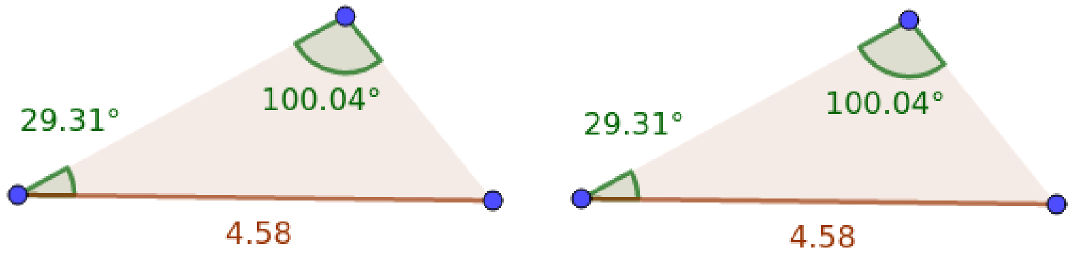


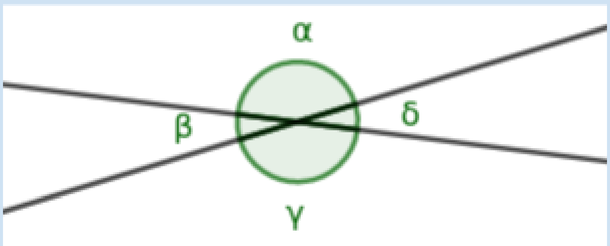

Figura 11: o caso **LAA**

**Exercício 3.** Mostre que os seguintes casos **não** permitem decidir se dois triângulos são congruentes ou não.

i) AAA
ii) LLA

**Ângulos opostos pelo vértice**

Antes de continuar, vamos ver ou lembrar um fato sobre ângulos. Quando duas retas se cruzam, quatro ângulos são formados, como na figura:




Numa situação assim, sabemos que o ângulo $\alpha$ (alfa) é congruente ao ângulo $\gamma$ (gama), e que o ângulo $\beta$ (beta) é congruente ao ângulo $\delta$ (delta). Ou seja, os ângulos **opostos** pelo vértice (onde as retas se cruzam) são **congruentes**.

Se quiser, demonstre que essa fato vale sempre que duas retas se cruzam (dica: pense que a soma de alguns ângulos na figura resultam em 180º)

**O método de Tales para achar a distância de um navio até a praia**[1]

Imagine que você está na praia, de frente a um navio. Para achar a distância de você até ele, faça o seguinte:

[1] Essa seção é inspirada no livro "Matemática Atual 8ª série", Antônio José Lopes Bigode. São Paulo, Atual, 1994. O método de Tales apresentado aí, por sua vez, foi inspirado no livro "Perspectivas da matemática", de Hans Freudenthal.

- Considere que o ponto em que o navio se encontra é o **A;**
- Marque o ponto em que você está como o ponto **B**;
- Caminhe por alguma distância perpendicularmente à reta que passa por você mesmo e pelo navio. Marque o ponto **C**;
- Caminhe essa mesma distância mais uma vez, na mesma direção, e marque o ponto **D**, de modo que $\overline{BC} = \overline{CD}$;
- Caminhe se afastando do mar e perpendicularmente a CD até que o ponto **B** se alinhe com o navio. Marque o ponto **E**.

**Exercício 4.**

**a)** Faça um desenho representando todos os segmentos de reta e pontos passo a passo acima. Inclua as seguintes figuras:

- Os pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E;**
- Os segmentos de reta **AB**, **AC**, **BC**, **CD**, **CE** e **DE.**

**b)** Demonstre que $\overline{DE} = \overline{AB}$. Para isso, siga os seguintes passos:

- Mostre que $\overline{BC} = \overline{CD}$;
- Mostre que $C\hat{D}E = C\hat{B}A$;
- Mostre que $D\hat{C}E = A\hat{C}B$[2];
- Mostre que $ABC$ é congruente a $CDE$;
- Conclua o resultado desejado.

**c)** Explique brevemente porque esse método permite calcular a distância de um navio até a praia.

**Exercício 5.** Demonstre que as duas diagonais de qualquer retângulo são congruentes. Você pode assumir como premissa a propriedade dos retângulos de que os lados opostos do retângulo são congruentes.

**Dica quase obrigatória**: desenhe as figuras descritas antes de tentar fazer as demonstrações.

**Exercício 6.** Demonstre a afirmação a seguir. Se dois segmentos se dividem mutuamente ao meio, então os segmentos que ligam as extremidades dos segmentos dados são congruentes[3].

**Exercício 7.** Demonstre que todo triângulo equilátero é equiângulo.

**Exercício 8.** Demonstre que todo triângulo equiângulo é equilátero.

[2] Se empacar aqui, releia o quadro azul no fim da seção anterior. Você pode tomar o fato apresentado lá como premissa.
[3] Idem.

**Exercício 9.** Demonstre que se os catetos de um triângulo retângulo são congruentes aos catetos de outro triângulo retângulo, então os dois triângulos são congruentes.

**Exercício 10.** Demonstre que se um triângulo tem dois ângulos internos congruentes, então ele é isósceles (dica: veja a demonstração referente ao exercício 2).

**Exercício 11.** Demonstre o *teorema do esquadro*, descrito a seguir. Se um ângulo agudo de um triângulo retângulo mede 30º, então o comprimento do lado oposto a esse ângulo é metade da hipotenusa. Você pode usar como premissa qualquer uma das afirmações apresentadas nos exercícios desta atividade.

Dicas: use a afirmação do exercício 10 como premissa e observe o triângulo retângulo abaixo (mas lembre-se de incluir na sua demonstração o motivo por que o ângulo oposto ao de 30º mede 60º)