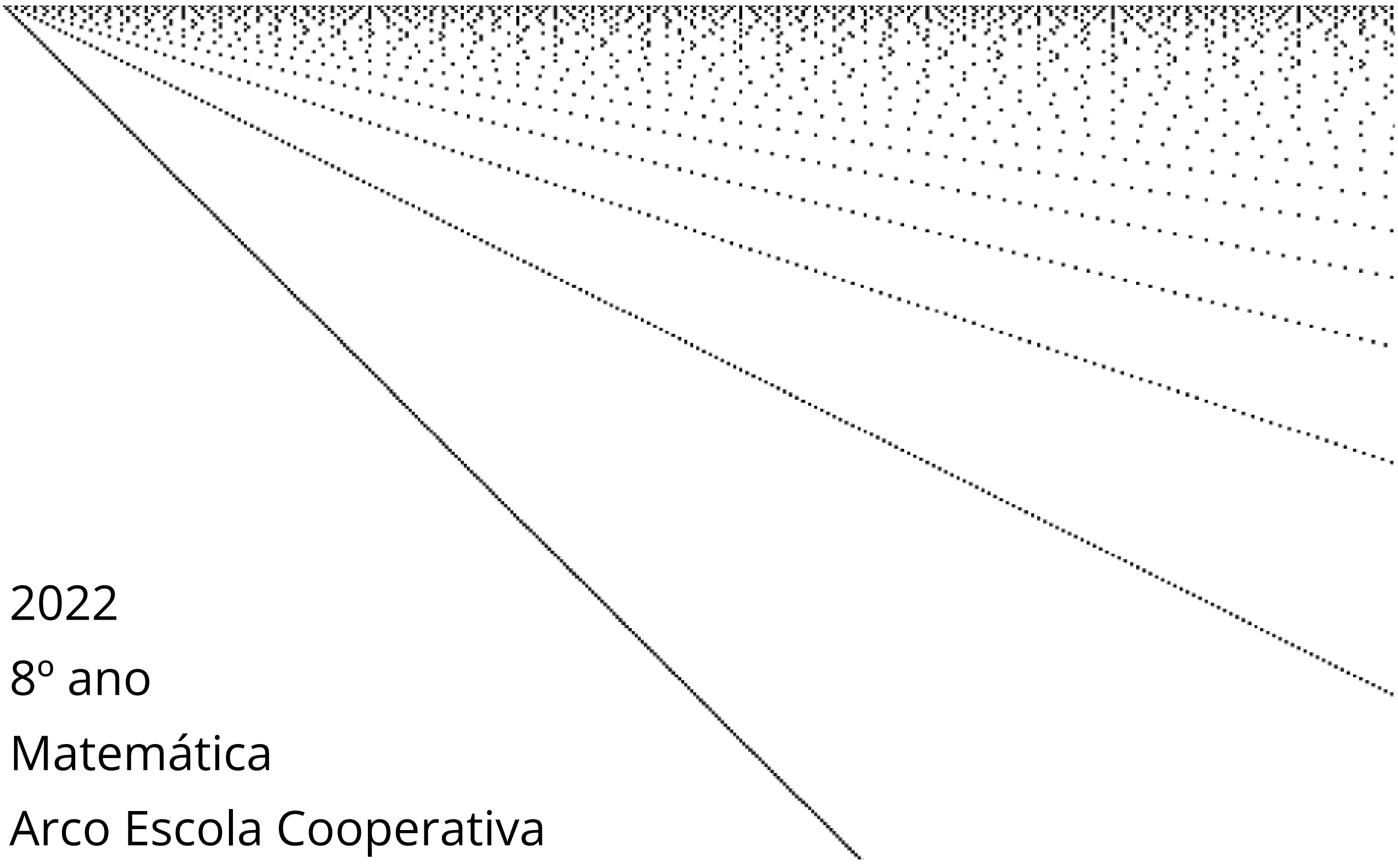


2022

8º ano

Matemática

Arco Escola Cooperativa

00 - Informações gerais e combinados

Além da sala de aula, a disciplina de matemática no 8º ano conta com outros dois espaços: a página online do curso, acessível em arco.coop.br/~jseckler/mat-8-2022, e com um espaço no Google Sala de Aula[1] (também conhecido como "GSA").

Atividades avaliadas

- Três vezes por bimestre, vocês deverão entregar a resolução de uma atividade. Vocês terão uma semana para fazê-la.
- Tragam dúvidas! Para ter dúvida, tem que tentar fazer. Ou seja: comecem a fazer bem antes da data de entrega.
- Quando eu pedir para vocês entregarem alguma coisa, eu quero que vocês consigam me mostrar se vocês investigaram, refletiram, raciocinaram, e fizeram conexões sobre aquilo de que estamos falando. Disso decorre:
  - Não adianta só me mostrar a **etapa final** do seu trabalho. Mostre o passo a passo do seu raciocínio**;**
  - Pode ser criativo! Se você me mostrar esses sinais de trabalho e intimidade com o conteúdo, eu vou aceitar formas heterodoxas de resolução de atividades, por exemplo:

    Um texto corrido
    Um programa de computador
    Uma planilha eletrônica
    Algo que você fez no minecraft
- Se eu propuser uma atividade individual mas você achar que faz sentido fazê-la em grupo, vou aceitar, desde que isso seja avisado com antecedência ou na própria entrega. O contrário não vale: se eu passar uma atividade em grupo, não vou aceitar entregas individuais.
- Se tirar foto do caderno, tenha certeza de que a orientação da foto está correta. Se esforce, por favor, para que a foto saia com boa qualidade.
- Datas de entrega:
  - 1º bimestre: 25/02, 18/03, 08/04;
  - 2º bimestre: 29/04, 20/05, 10/06.

[1] Link para a sala: https://classroom.google.com/u/1/c/NDU1NDI3NDcyMzAx. Código da sala: 3b4qz2u

Avaliação do caderno

- Cada estudante entregará o caderno para avaliação uma vez por bimestre, numa data especificada na tabela abaixo.
- Os cadernos serão recolhidos às segundas-feiras, de acordo com as datas na tabela. Eles serão devolvidos na aula seguinte ou no mesmo dia.

Entrega de caderno			
1º bimestre		**2º bimestre**	
14/02	Nina Menezes Junqueira	**11/04**	Luisa Costa Prado
	Vinícius Dogo de Resende Conzo		Amélie Ferreira Belo de Oliveira
	Matteo Morettini Stedile		Eduardo Gonçalves Canella
	Beatriz Novaes Feijó	**18/04**	Raul Ferreira Moldan
	Raul Ferreira Moldan		Caetano Romero Assunção
07/03	Tarsila Garofalo Ramos		Ana Cuara Davidson Cavalcante
	Caetano Romero Assunção	**02/05**	Isadora de Alencar Chiozzini
	Teresa Figueiredo Saad Jafet		Maria Julia Silva Vieira
	Tomé Calheiros Figueroa		Théo Silva Iazzetta
	Juliana Aparecida de Jesus Lima Reis		Eva Salles Bosquê
21/03	Amélie Ferreira Belo de Oliveira	**09/05**	Tomé Calheiros Figueroa
	Luisa Costa Prado		Juliana Aparecida de Jesus Lima Reis
	Maria Julia Silva Vieira		Matteo Morettini Stedile
	Théo Silva Iazzetta		Vinícius Dogo de Resende Conzo
	Eva Salles Bosquê	**23/05**	Teresa Figueiredo Saad Jafet
	Kathellen Oliveira da Silva		Tarsila Garofalo Ramos
28/03	Eduardo Gonçalves Canella		Beatriz Novaes Feijó
	Pedro Couso Fogaça de Almeida		Pedro Couso Fogaça de Almeida
	Iara Rosalen de Paula	**30/05**	Nina Menezes Junqueira
	Ana Cuara Davidson Cavalcante		Cora Vilar Monte
	Isadora de Alencar Chiozzini		Kathellen Oliveira da Silva
	Cora Vilar Monte		Iara Rosalen de Paula

Avaliações em sala de aula (“provas”)

- Ao fim de cada bimestre, faremos uma prova. Seu conteúdo será a matéria vista até aquele momento. Sua duração será uma aula inteira.

- Datas:
  - 3º bimestre: 08 de abril
  - 4º bimestre: 10 de junho

Critérios de avaliação

- **Participação**: presença nas aulas e interação durante a aula. Alguns exemplos que contam positivamente para a nota de participação: fazer perguntas, responder perguntas, não conversar paralelamente à aula, fazer o que é pedido, etc;
- **Atividades avaliadas**: entrega, qualidade, interação com a turma ou com o grupo, interação com o professor;
- **Avaliação em sala de aula**: desempenho na prova;
- **Caderno:** aulas anotadas, completude, corretude, capricho, etc;

A nota de um estudante é calculada da seguinte forma, a cada bimestre.

$$\mathbf{NF} = 0{,}3 \cdot \mathbf{Pa} + 0{,}3 \cdot \mathbf{A} + 0{,}2 \cdot \mathbf{Pr} + 0{,}2 \cdot \mathbf{C}$$

Em que **NF** é a nota final, **A** é a nota de atividades, **Pa** é a nota de participação, **Pr** é a nota da prova e **C** é a nota de caderno. O conceito final é atribuído seguindo mais ou menos o seguinte mapeamento (ajustes poderão ser feitos):

insatisfatório:	$0 \leq MF < 6$
satisfatório:	$6 \leq MF < 9$
plenamente satisfatório:	$9 \leq MF \leq 10$

01 - Números que geram outros números

Por volta do século VI a.C. pensadores gregos da escola de Pitágoras se interessavam pelas relações entre os números naturais. Uma das ideias que surge nesse período é a de que alguns números **originam** outros. Por exemplo, considere o número *1*: ele forma todos os outros números naturais: basta **somar** o um a ele mesmo tantas vezes quanto for necessário.

$$1 = 1$$
$$2 = 1 + 1$$
$$3 = 1 + 1 + 1$$
$$\ldots$$
$$100 = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$$

O número *2*, por outro lado, também consegue gerar vários números:

$$2 = 2$$
$$4 = 2 + 2$$
$$6 = 2 + 2 + 2$$
$$\ldots$$
$$100 = 2 + 2 + 2 + \ldots + 2$$

Exercício 01.0

a) Como se chamam os números que o 2 consegue gerar pela soma?
b) Como se chamam os números que o 2 não consegue gerar pela soma?
c) Como se chamam os números que o 3 consegue gerar pela soma?
d) Quantos são os números que o número 0 consegue gerar pela soma?

No exercício anterior, você deve ter notado que, através da soma, o zero não consegue gerar nenhum outro número além dele mesmo! É um número que tem essa propriedade de que, quando *somamos* ele a um outro número, nada acontece. Por isso, dizemos que o *0* é o *elemento neutro da adição*.

Até agora, viemos falando de geração de números pela **soma**. E se considerarmos a multiplicação?

Originando números pela multiplicação

Veja alguns exemplos de geração de números pela multiplicação:

$$
\begin{aligned}
4 &= 2 \cdot 2 \\
6 &= 2 \cdot 3 \\
12 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \\
30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5
\end{aligned}
$$

Exercício 01.1

a[2]) Dê três exemplos de números que podem ser originados pela multiplicação usando somente o número 2.
b[3]) Dê três exemplos de números que podem ser originados pela multiplicação usando somente o número 3.
c) O número 6 pode ser gerado pela multiplicação usando somente o 2?
d) Dê outros dois exemplos de números que não podem ser gerados somente pelo 2.
e) Quantos são os números que podem ser originados pela multiplicação usando somente o número 1? E usando o número 0?

Exercício 01.2 Releia o parágrafo na seção anterior que explica o que é o *elemento neutro da adição.* Com base na sua resolução do exercício 01.1 e nas suas próprias investigações, responda: que número é o elemento neutro da multiplicação?

A maioria dos números é **gerada** a partir de outros números. Ou seja, conseguimos "reescrever" a maioria dos números como uma conta de multiplicação. Como vimos, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Veja outros exemplos:

$$
\begin{aligned}
20 &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \\
4 &= 2 \cdot 2 \\
8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2
\end{aligned}
$$

[2] questão extra: como chamam-se esses números gerados somente pelo 2?
[3] questão extra: como chamam-se esses números gerados somente pelo 3?

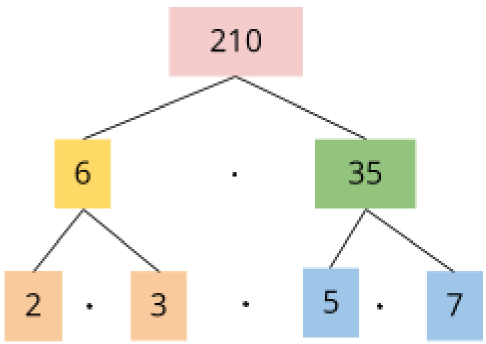
$$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$
$$9 = 3 \cdot 3$$
$$2 = ?$$

Note que, por meio da multiplicação, não conseguimos gerar o próprio número 2 a partir de outro número natural. Concluímos, então, que o 2 é **gerador** de outros números naturais por meio da multiplicação, mas não é gerado por nenhum deles.

Exercício 01.4 Encontre ao menos outros três números que têm essa mesma característica que o 2: é um número gerador mas que não é gerado[4].

Decompondo um número

- O número **210** pode ser obtido multiplicando-se **6** por **35**
  - O número **6** pode ser obtido multiplicando-se **2** por **3**
  - O número **35** pode ser obtido multiplicando-se **5** e **7**
  - Os números 2, 3, 5, e, 7 não podem ser formados por outros números naturais por meio da multiplicação. Logo, eles são os geradores ou **fatores** do **210**.



Ou então...

$$210 = 6 \cdot 35$$
$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 35$$
$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

[4] Desafio: encontre um número gerador que seja maior do que 50.

- O número 60 pode ser obtido multiplicando-se 4 por 15. Por sua vez, $4 = 2 \cdot 2$ e $15 = 3 \cdot 5$. Então:

$$60 = 4 \cdot 15$$
$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$
ou então, equivalentemente,
$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Produto e fatores

Suponha que estejamos fazendo uma conta de multiplicação qualquer:

2 · 4 · 6 = 48

Fator é o nome que damos aos números que estão sendo multiplicados;
Produto é o nome que damos ao resultado da multiplicação.

Daí o nome **fatoração**. **Fatorar** quer dizer escrever alguma coisa **como uma multiplicação**. Veja como exemplo a fatoração do número 210:

210 = 2 · 3 · 5 · 7

Analogamente, na soma, temos as **parcelas** e a **soma**.

2 + 4 + 6 = 12

Os números naturais que formam outros números naturais por meio da multiplicação são chamados **números primos**. Porque primo? Um dos significados da palavra primo é “primeiro”. Os antigos gregos julgavam que os números primos são os primeiros em importância, pelo fato de gerarem todos os demais. Dizemos que os números que não são primos são **compostos**.

gerador	<->	primo
gerado	<->	composto

Exercício 01.5

a) O número 2171 é resultado da multiplicação de 13 por 167. O número 2171 é primo? E o número 13, é primo? Justifique as respostas.
b) Decomponha os números abaixo em fatores primos ao completar as lacunas:

i) $30 = \ldots\ldots \cdot 5 = \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots$

ii) $44 = \ldots\ldots \cdot 11 = \ldots\ldots^{2} \cdot \ldots\ldots$

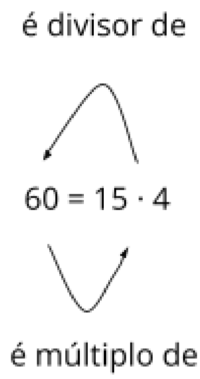
iii) $200 = 8 \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots^{3} \cdot \ldots\ldots^{2}$

Múltiplos e divisores

Dizemos que um número é **múltiplo** de outro quando é possível chegar no segundo multiplicando o primeiro por algum outro número inteiro. Por exemplo, sabemos que

$$60 = 15 \cdot 4$$

Portanto, 60 é múltiplo de 15. Ao mesmo tempo, 60 é múltiplo de 4. O “contrário” do múltiplo é o divisor: dizemos que um número é **divisor** de outro quando é possível chegar no segundo dividindo o primeiro por algum número inteiro. No exemplo acima, temos que 15 é divisor de 60. Ao mesmo tempo, 4 é divisor de 60.



Exercício 01.6 Veja que coincidência. Os divisores de 6, excluído o próprio 6, são os números 1, 2 e 3. A soma desses divisores é 6!

- divisores de 6: **1, 2, 3**
- soma desses divisores: **1 + 2 + 3 = 6**

Os gregos da escola de Pitágoras chamaram os números que apresentam essa propriedade de **números perfeitos**.

a) Descreva com suas palavras a propriedade a que estamos nos referindo. Ou então: o que faz um número ser **perfeito?**

b) O número 10 é perfeito? Justifique.
c) Há um número perfeito entre 25 e 30. Que número é esse? Justifique.

Exercício 01.7 Classifique as afirmações abaixo como verdadeiras ou falsas. Justifique cada classificação.

a) Qualquer número é sempre divisor dele mesmo
b) O número 1 é múltiplo de todos os números naturais
c) O número 1 é divisor de todos os números naturais
d) Qualquer número primo tem sempre um divisor
e) Qualquer número primo tem sempre um múltiplo
f) Qualquer número primo tem ao menos três divisores
g) Qualquer número composto tem ao menos três divisores

Exercício 01.8 Considere a sequência dos múltiplos de 6:

$$6, 12, 18, 24, 30 \ldots$$

a) Decomponha os seguintes múltiplos de 6 em fatores primos:

i) $6 = 2 \cdot 3$
ii) 18 = ______________
iii) 30 = ______________
iv) 42 = _______________

b) Quais são os fatores primos comuns a todas essas decomposições?

Exercício 01.9 Estamos considerando aqui a seguinte definição de número primo: "aquele que gera mas não é gerado". Existe outra definição, que você já deve ter ouvido, que diz que o número primo é "aquele que só é divisível pelo número 1 e por ele mesmo". Essas duas definições são equivalentes? Ou seja, existe algum número que é primo **de acordo com uma** das definições mas não é primo de acordo com a outra?

Exercício 01.10 Em dezembro de 2018 o maior número primo conhecido até hoje[5] foi descoberto. É o número resultado desse cálculo:

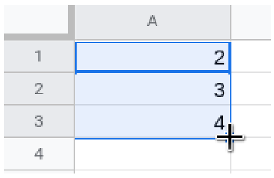
---

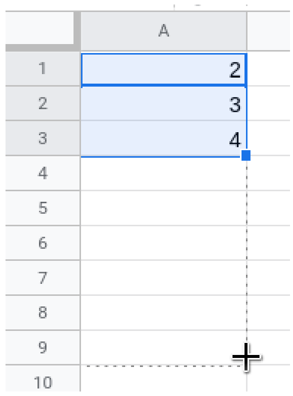
[5] Fevereiro de 2022

$$2^{82,589,933} - 1$$

É um número com mais de 24 milhões de algarismos[6]! Qualquer pessoa levaria mais de 200 dias — se trabalhasse sem parar — para escrever todos os algarismos desse número. Mas não é preciso escrevê-lo para ter certeza de que o triplo desse número não é primo. Por quê?

Exercício 01.11 Há mais de 2000 anos, o matemático grego Eratóstenes (c. 267-195 a.C) inventou um método para descobrir todos os números naturais primos menores que certo número; esse método ficou conhecido como **Crivo de Erastóstenes**. Agora, usando esse método, você vai construir uma planilha eletrônica para descobrir todos os números primos menores que 50.





a) Insira todos os números naturais de 2 até 50. Você pode inserir os primeiros números e usar o "+" para deixar a planilha gerar os números para você.
b) Apague ou risque todos os múltiplos de 2, mas não o próprio 2.
c) Neste estágio, após o 2, o próximo número que não está apagado é o 3. Apague todos os múltiplos de 3, exceto o próprio 3.
d) Siga para o próximo número que não foi apagado e risque os seus múltiplos, mas não ele mesmo. Continue assim até não haver mais nada para apagar. Os números que sobrarem serão os primos menores que 50!

O prestígio dos números primos

A importância teórica dos números primos está em gerar os outros números naturais. Por isso, eles têm aplicação dentro da matemática no cálculo do *mmc* e de *frações*, como veremos adiante.

Essas características, no entanto, não explicam por si só o fascínio que muitos sentem por eles. Os números primos são pesquisados há mais de 2000 anos e até hoje se descobrem novas propriedades. Inclusive, existem algumas ideias sobre os números primos que não foram comprovadas. Por exemplo, ninguém sabe se os chamados *primos gêmeos* (duplas de primos cuja diferença entre eles é 2, como 17

[6] Quando representado na base 10.

e 19 ou 29 e 31) existem em quantidade finita ou infinita.

Veja um exemplo de como a pesquisa sobre números primos ainda é atual. Na sequência dos primos, ainda não se encontrou um padrão que permita determinar o próximo número primo. Por isso, pouco depois do advento da internet, centenas de pessoas se associaram em um projeto cooperativo para pesquisar números primos grandes. Esse projeto é o GIMPS (*Great Internet Mersenne Prime Search*), cujo endereço na internet é www.mersenne.org. Foi esse grupo que descobriu o primo gigante que foi citado no exercício 01.10

Inclusive, qualquer um pode participar desse projeto cooperativo! Basta instalar um programa no seu computador e deixá-lo rodando por muito — muito mesmo — tempo! Veja mais informações em https://www.mersenne.org/why_join/.

Decomposição em fatores primos

Como vimos, os números primos têm destaque na Matemática porque geram, por meio da multiplicação, os demais números naturais, exceto o 0 e o 1.

Os naturais gerados por números primos são chamados **números compostos**, como vimos, já que podem ser decompostos em **fatores primos**. Nesta seção, vamos tratar de como decompor os números compostos em fatores primos. Isso significa que vamos escrever o número composto na forma de multiplicação de primos. Se o número natural não é zero, um, nem primo, sempre é possível decompô-lo desta maneira.

Para isso, apresentamos um processo prático. Como exemplo, vamos decompor o número 140 em fatores primos. Acompanhe o processo passo a passo.

Primeiro, escreva o número a ser decomposto e coloque um traço vertical ao lado dele:

$$\begin{array}{r|l} 140 & \\ & \\ & \end{array}$$

Divida-o pelo primeiro número primo que for possível:

$$\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & \\ & \end{array}$$

Continue dividindo pelo mesmo fator primo enquanto for possível:

$$\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & \end{array}$$

Quando a divisão pelo primeiro fator não for mais possível, tente dividir pelo próximo número primo (neste caso, 3). Não sendo possível também, tente o próximo (5):

$$\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & \end{array}$$

E assim por diante. Vamos dividir, então, por 7:

$$\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Chegamos ao número um. Pronto! A decomposição está completa.

$$\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Esse processo prático é conhecido como fatoração em primos. Nele costumamos dividir o número dado por seus fatores primos em ordem crescente (primeiro 2, depois o 3, 5, 7, etc). Essa ordem, no entanto, não é obrigatória. Por exemplo, é possível dividir por 2, depois por 5, e somente depois dividir por 3. Isso não muda a decomposição, afinal de contas, a ordem dos fatores não altera o produto.

Para realizar essas decomposições, vale lembrar de algumas *regras de divisibilidade*:

- Se um número é par, ele é divisível por 2;
- Se a soma dos algarismos de um número é divisível por 3, então esse número é divisível por 3;
- Se um número termina em 0 ou em 5, ele é divisível por 5.

Exercício 01.12

Usando o processo prático que acabou de conhecer, decomponha estes números em fatores primos:

a) 84 **b)** 130 **c)** 250 **d)** 693

Exercício 01.13 Segue uma tabela com todos os primos entre 50 e 150:

53	59	61	67	71
73	79	83	89	97
101	103	107	109	113
127	131	137	139	149

Consultando a tabela, decomponha em fatores primos:

a) 106 **b)** 695 **c)** 732 **d)** 1313

Exercício 01.14 A decomposição em fatores primos do número 1001 é

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$$

a) Sem fazer contas, escreva a decomposição em fatores primos de 2002, 3003, 4004 e 5005.

b) Apresente todos os divisores de 1001 (Dica: esses divisores, exceto o 1, têm que ser gerados pelos números primos 7, 11 e 13)

Exercício 01.15

Faça uma tabela como a mostrada abaixo, preenchendo-a até n = 20. Sugiro usar uma planilha eletrônica. Se fizer no caderno, você vai precisar de uma calculadora.

n	1	2	3	4	5	6	...
1/n	1	0,5	0,333...	?	?	?	?

Alguns desses quocientes são números decimais com um número **finito** de casa decimais e outros são **dízimas periódicas**, ou seja, têm infinitas casas decimais. Reflita sobre o motivo por que algumas divisões terminam e outras não, e responda a pergunta: que característica deve ter o número n para que $\frac{1}{n}$, na forma decimal, tenha um número finito de casas decimais? Registre as etapas da investigação:

1. exploração
2. elaboração de hipóteses
3. verificação das hipóteses elaboradas
4. conclusão (*somente se possível: essa é a parte menos importante*)

Números que têm múltiplos em comum

Nessa seção, vamos investigar os casos em que um número é múltiplo de outros dois números ao mesmo tempo. Por exemplo, o número 100 é múltiplo de 10, já que $100 = 10 \cdot 10$, mas ele também é múltiplo do 20, já que $100 = 20 \cdot 5$. Mais especificamente, vamos querer responder à pergunta: dados dois números quaisquer, quais são os números que são múltiplos desses dois números ao mesmo tempo? Por exemplo, quais são os números que são múltiplos 10 e de 20 ao mesmo tempo? Como já vimos, o 100 é um deles!

Exercício 01.16

a) Dê outros três exemplos de números que são múltiplos do 10 e do 20 ao mesmo tempo.
b) Dê três exemplos de números que são múltiplos do 10 e do 15 ao mesmo tempo.
c) Dê três exemplos de números que são múltiplos do 10 e do 100 ao mesmo tempo
d) Dê três exemplos de números que são múltiplos do 3 e do 5 ao mesmo tempo.

A partir de agora, vamos nos referir aos múltiplos de dois outros números ao mesmo tempo como os seus **múltiplos comuns**. Ou seja, o 100 é múltiplo comum ao 10 e ao 20, já que é múltiplo de um e de outro ao mesmo tempo.

Um método bastante simples, mas talvez um pouco trabalhoso, de achar esses múltiplos comuns é o seguinte: liste os múltiplos de um número. Em seguida, liste os múltiplos de outro. Os números que aparecem nas duas listas são os múltiplos comuns! No exemplo a seguir, vamos achar os múltiplos comuns ao 10 e ao 6. Veja:

6	66	**10**	110
12	72	20	120
18	78	30	130
24	84	40	140
30	90	50	150
36	96	60	160
42	102	70	170
48	108	80	180
54	114	90	190
60	120	100	200

É comum chamarmos uma lista de múltiplos de um número a **tabuada** desse número. Ao lado, estamos comparando a tabuada do 6 com a tabuada do 10.

E assim descobrimos alguns múltiplos comuns ao 6 e ao 10: 30, 60, 90, 120, etc. Para descobrir mais múltiplos comuns, basta continuar as listas de múltiplos.

Exercício 01.17

a) Cite três múltiplos comuns ao 12 e ao 18.
b) Cite três múltiplos comuns ao 5 e ao 7.
c) Cite três múltiplos comuns ao 24 e ao 30.

Exercício 01.18

a) Decomponha os números 12 e 18 em seus fatores primos. Decomponha também os múltiplos comuns encontrados no exercício 01.17 a) em seus fatores primos.
b) Faça o mesmo para os números (5, 7 e múltiplos comuns) do exercício 01.17 b).
c) E o mesmo para os do exercício 01.17 c).
d) Compare os fatores primos dos números iniciais (12 e 18, 5 e 7, 24 e 30) com os fatores primos dos múltiplos comuns desses números iniciais. Você percebe algum padrão?

Exercício 01.19 Ao fazer os exercícios acima, talvez você tenha encontrado um jeito muito fácil de achar um múltiplo comum a dois números, bastando realizar uma operação com eles. Que jeito é esse?

O menor dos múltiplos comuns

Imagine a seguinte situação: dois carteiros trabalham na mesma região. O primeiro carteiro visita a rua Corinto a cada 6 dias. O segundo carteiro visita a rua Corinto a cada 9 dias. No dia 2 de março de 2022, os dois carteiros se encontraram nessa rua durante o expediente.

Exercício 01.20 A respeito da situação descrita acima:

a) Cite duas datas em que os dois carteiros vão se encontrar.
b) Dali a quantos dias os carteiros vão se encontrar novamente?

Ao fazer o exercício 01.20, você deve ter notado que, para responder o item a), bastou encontrar alguns múltiplos comuns ao 6 e ao 9. Para responder item b), no entanto, não bastava simplesmente ser um múltiplo comum qualquer. Tinha que ser o *próximo* múltiplo comum, ou então, o menor deles. Vamos chamar o menor dos múltiplos comuns de **mínimo múltiplo comum**, ou então, abreviadamente, **mmc**.

Para calcular o mínimo múltiplo comum de dois números, podemos lançar mão do mesmo recurso: listamos todos os múltiplos dos dois números, e achamos o menor dos que há em comum. Vamos calcular, por exemplo, o mmc de 6 e 9.

Múltiplos de 6: 0, 6, 12, 18, 24, ...
Múltiplos de 9: 0, 9, 18, 27, 36, ...

Pronto! O mmc de 6 e 9 é 18. Podemos também escrever essa afirmação assim:

$$mmc(6;\ 9) = 18$$

Exercício 01.21 João é piloto de avião. Ele faz a rota São Paulo-Manaus a cada 15 dias. Paulo é comissário de bordo na mesma companhia aérea. Ele trabalha no voo São Paulo-Manaus a cada 12 dias. João e Paulo estavam no mesmo voo São Paulo-Manaus no dia 1º de maio. Qual é o próximo dia em que eles se reencontrarão a bordo?

Exercício 01.22

a) Liste os cinco primeiros múltiplos comuns ao 15 e ao 6.
b) Encontre o $mmc(6;\ 15)$.
c) Liste os primeiros 5 múltiplos do número encontrado no item acima. Ou seja, faça uma pequena tabuada do $mmc(6;\ 15)$.
d) Você encontrou alguma semelhança entre o resultado do item **a)** com o resultado do item **c)**?
e) O que podemos concluir sobre a diferença entre múltiplos comuns consecutivos? Ou seja, se fizermos uma lista dos múltiplos comuns de dois números, qual vai ser a distância entre cada item dessa lista?

Exercício 01.22

a) Produza uma tabela como a que se segue, e complete-a.

a	*b*	mmc(*a*; *b*)	Fatores primos de *a*	Fatores primos de *b*	Fatores primos de mmc(*a*; *b*)
4	6	12	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 2 \cdot 3$
10	25		$2 \cdot 5$	$5 \cdot 5$	$5 \cdot 5 \cdot 2$
15	12	60	$3 \cdot 5$	$2 \cdot 2 \cdot 3$	
14	49				
25	125				
12	16				
18	45				

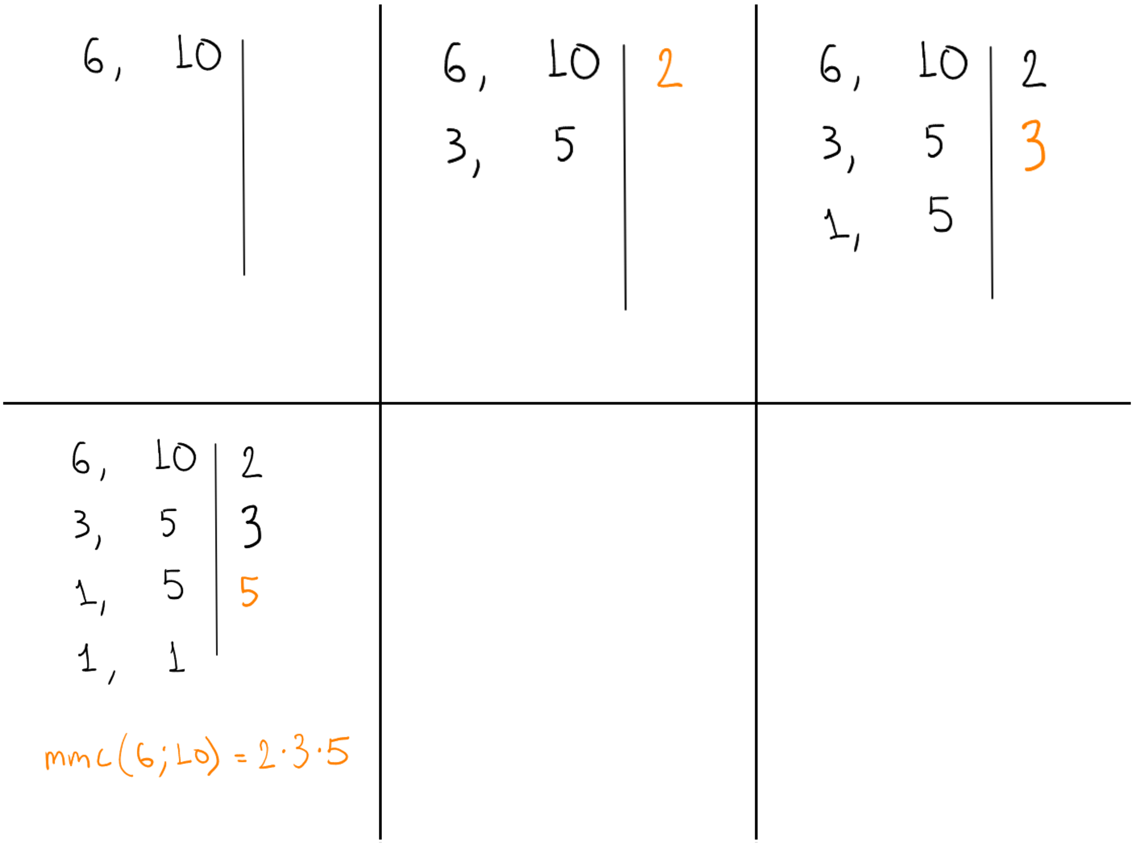
b) Compare os fatores primos de *a* e *b*, em cada caso, com os fatores primos do mínimo múltiplo comum desses números. Você enxerga algum padrão?

c) Sabendo somente a decomposição em fatores primos de dois números, descubra quais são os fatores primos do mmc deles:

Fatores primos de *a*	Fatores primos de *b*	Fatores primos de mmc(*a*; *b*)
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$	

Um método prático para achar o mmc

A resolução do exercício 01.22 dá inspiração para acharmos um jeito mais rápido de achar o mmc de dois números, que não seja listando todos os seus múltiplos. Como vimos, achar o *mmc* de dois números tem tudo a ver com achar os fatores primos desses números. Ao invés de achar esses fatores separadamente, usando duas vezes o método prático apresentado na seção “Decomposição em fatores primos”, vamos achá-los simultaneamente. No exemplo a seguir, vamos achar o *mmc* de 6 e 10.



Por que esse método funciona? No exercício 01.22, você deve ter visto que todos os fatores primos de *a* e *b* devem aparecer na decomposição do *mmc*. Mas se algum fator está repetido em *a* e *b*, ele não precisa aparecer duas vezes! No exemplo acima, em que calculamos $mmc(6;\ 10)$, vemos que o 2 é um fator tanto do 6 quanto do 10, por isso ele só aparece uma vez na lista da direita.

Exercício 01.23 Calcule:

a) $mmc(12;\ 14)$ **b)** $mmc(20;\ 70)$

c) $mmc(63;\ 18)$ **c)** $mmc(231;\ 14)$

Exercício 01.24

a) Veja o exemplo ao lado. Aproveite-o e calcule:

i) mmc(77; 49)

ii) mmc(132; 165)

77,	132	2
77,	66	2
77,	33	3
77,	11	7
11,	11	11
1		

Conclusão:
mmc(77; 132) = $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 924$

Exercício 01.25 Em uma corrida de fórmula 1, um piloto brasileiro completava uma volta na pista a cada 84 segundos. Mas um piloto alemão, com um carro mais veloz, dava uma volta a cada 66 segundos. Sabendo que eles largaram juntos, quanto tempo depois passaram juntos novamente pelo ponto de partida? Nesse momento, quantas voltas cada um completou?

Exercício 01.26

a) Complete a tabela.

a	2	5	7	5
b	3	7	11	13
mmc(a; b)				

b) Analisando os dados da tabela, responda: se **a** e **b** são números primos, o que se pode concluir sobre **mmc(a; b)**?

c) Complete a tabela.

a	4	6	9	14
b	5	7	10	15
mmc(a; b)				

d) Analisando os dados da tabela, responda: se **a** e **b** são números consecutivos (ou então, se **b** é *sucessor* de **a**), o que se pode concluir sobre **mmc(a; b)**?

e) Complete a tabela.

a	4	6	15	42
b	8	18	45	84
mmc(a; b)				

f) Analisando os dados da tabela, responda: se **b** é múltiplo de **a**, o que se pode concluir sobre **mmc(a; b)**? E se **b** for divisor de **a**?

Exercício 01.27 Numa demonstração de ginástica aeróbica, menos de 200 participantes foram distribuídos em vários quadrados, com 36 pessoas em cada um. Mais tarde eles saíram em grupos de 20. Quantos atletas participaram da demonstração?

Exercício 01.28 Calcule (dica: lembre do que você descobriu no exercício 01.26):

a) mmc(4; 5)
b) mmc(20; 25; 30)
c) mmc(40; 50; 60)
d) mmc(2; 4; 8; 16; 32)
e) mmc(2; 3; 5; 7)

02 - Linguagem algébrica

A matemática se divide em vários ramos ou subáreas. A aritmética, por exemplo, é o ramo que estuda os números e as operações. A geometria estuda as formas. A álgebra trata das expressões matemáticas com letras, por exemplo, as fórmulas e as equações. A álgebra difere da aritmética pois faz uso da *abstração* ao usar letras para representar números desconhecidos ou que podem assumir muitos valores.

Vamos usar números, letras e sinais de operação para expressar operações e relações. Se quisermos representar **um número qualquer**, usaremos simplesmente uma letra, por exemplo, x. Se quisermos representar o dobro de um número qualquer, poderemos usar o número dois, que está associado à ideia de dobro, e multiplicá-lo por esse número qualquer escolhido anteriormente: $2x$.

Omitindo o sinal de multiplicação

Até este momento, quando queríamos representar a multiplicação de dois números, usávamos os sinais em cruz (×) ou o ponto (·). Por exemplo:

$$8 = 2 \cdot 4 \qquad \text{ou então} \qquad 8 = 2 \times 4$$

A partir de agora, vamos fazer contas também com letras, que estarão representando números. Quando estivermos usando a multiplicação com essas letras, poderemos *omitir* o símbolo da multiplicação. Ao invés de escrever

$$8 = 2 \times a \qquad \text{ou} \qquad 8 = 2 \cdot a$$

poderemos usar, simplesmente

$$8 = 2a$$

O mesmo vai ocorrer quando usarmos parênteses. Ao invés de usarmos

$$8 = 2 \times (a + 2) \qquad \text{ou} \qquad 8 = 2 \cdot (a + 2)$$

poderemos usar, simplesmente

$$8 = 2(a + 2)$$

Há dois motivos para esse combinado. Primeiro, que o símbolo × vai começar a ser confundido com a letra x, que, como veremos, será bastante utilizada. Além disso, a escrita fica mais concisa e simples.

Exercício 02.0 A tabela abaixo relaciona uma situação do cotidiano, uma frase em português que diz algo sobre os números envolvidos nessa situação cotidiana, e a expressão algébrica correspondente a essa frase. Complete a tabela, seguindo os exemplos:

Situação do cotidiano	**Em português**	**Expressão algébrica**
O número de estudantes numa sala da Arco	um número qualquer	x
	outro número qualquer	y
O dobro de vassouras para os 15 minutos	o dobro de um número	2x
O número do estudante que vem depois da Carla na chamada	o sucessor de um número	
"Eu quero duas vezes mais uvas que ele. Coloca só mais uma, por favor"	o sucessor do dobro de um número	
	o triplo de um número	
	o quádruplo de um número	
	um número mais 5	
	a soma de dois números quaisquer	
	o quadrado de um número	

Bia diz: "eu quero um chocolate a mais que a Carla". Danilo diz: "Eu quero duas vezes mais chocolate que a Bia!"	o dobro do sucessor de um número	

Valor numérico de uma expressão algébrica

Em uma expressão algébrica, vamos chamar as letras que representam algum número de **variáveis**. Na expressão $a = 2b$, por exemplo, temos duas variáveis: a e b.

Dizemos que o **valor numérico** de uma expressão algébrica (ou seja, uma expressão com letras, números e operações) é o valor obtido pelo seguinte procedimento:

1) *substituir* todas as variáveis da expressão por números;
2) efetuar todas as operações.

Os números pelos quais as variáveis vão ser substituídas são dados. Por exemplo, considere a expressão algébrica correspondente a "o antecessor do triplo de um número":

$$3n - 1$$

Vamos descobrir qual é o valor numérico dessa expressão **quando o n é igual a 15**.

$3n - 1$	Expressão inicial
$3 \cdot 15 - 1$	1) substituímos a variável pelo número correspondente (nesse caso, 15)
$45 - 1$	2) efetuamos as operações
44	

Pronto! Quando $n = 15$, O valor numérico de $3n - 1$ é 44. Podemos expressar essa ideia, em português, da seguinte maneira:

> "qual é o valor do antecessor do triplo de um número se esse número é o 15?"

Para outros valores de n, o valor numérico da mesma expressão seria diferente. Verifique que, por exemplo, quando $n = 5$ o valor numérico da expressão é 14.

Exercício 02.1 Encontre o valor numérico das expressões abaixo:

a) $2z + 1$, para $z = 3$
b) $2z + 1$, para $z = 2$
c) $2z + 1$, para $z = 1$
d) $2z + 1$, para $z = 0$
e) $2z + 1$, para $z =- 1$

f) $t^2 - 1$, para $t =- 2$
g) $t^2 - 1$, para $t =- 1$
h) $t^2 - 1$, para $t = 0$
i) $t^2 - 1$, para $t = 2$
j) $t^2 - 1$, para $t = 5$

Exercício 02.2 Complete a tabela:

a	b	c	$a + b$	$2(a + b)$	$3c$	$2(a + b) - 3c$
1	-3	-2	-2	-4	-6	2
2	-2	-1	0	0	-3	3
3	-1	0				
4	0	1				
5	1	2				
6	2	3				

Relacionando expressões algébricas

Podemos relacionar duas ou mais expressões algébricas. Por exemplo, se quisermos dizer que um número é igual ao dobro de outro número, poderemos lançar mão do símbolo da igualdade (=) e escrever *a* = *2b*. Se quisermos dizer que um número é maior que outro, escreveremos *m* > *n*.

Exercício 02.3 Complete as lacunas seguindo os exemplos:

um número é igual ao dobro de outro:	a = 2b
um número é maior que outro:	m > n
um número é menor que seu dobro:	x < 2x
um número é igual a outro número mais 5:	_______
o sucessor de um número é igual a outro número:	_______
o dobro de um número é menor ou igual ao triplo de outro número:	_______
um número é maior do que sete:	_______
um número é menor que seu sucessor:	_______

Relação entre expressões algébricas como essas são chamadas de **sentenças** matemáticas. Sentenças são uma afirmação de algo sobre alguma coisa. Por exemplo, a sentença $5 = 2 + 3$ está afirmando que cinco **é** igual a dois mais três. Existem expressões que não são sentenças, por exemplo: $8 \cdot 5 + 3$. Essa expressão não afirma nada, apenas apresenta um cálculo.

Observe agora as seguintes sentenças:

i) 3 + 7 = 10
ii) xy = 10
iii) m > 7
iv) 3 < 5
v) 8 é primo
vi) 2 · 3 = 5

Você deve ter percebido que as sentenças i e iv são verdadeiras. As sentenças v e vi são falsas. E a ii e iii?

i) 3 + 7 = 10	verdadeiro
ii) xy = 10	?
iii) m > 7	?
iv) 3 < 5	verdadeiro
v) 8 é primo	falso
vi) 2 · 3 = 5	falso

Nesses casos, *x*, *y*, e *m* são letras que podem representar qualquer número. Chamamos esses números sem valor definido de **variáveis**. Por exemplo, se *m* for igual a 8, então a ii é verdadeira. Se *m* for igual a 100, também. Se, no entanto, *m* for igual a 5, então a ii é falsa. Dá pra entender por que chamamos *m* de uma variável: seu valor varia! Ou seja, se perguntarmos se a sentença *m > 7* é verdadeira, a resposta é: *depende do valor de m*.

Sentenças sobre as quais não é possível afirmar se são verdadeiras ou falsas devido à presença de uma variável são chamadas de **sentenças abertas**.

Exercício 02.4 Considere as sentenças abaixo. Para cada uma, decida se é verdadeira, falsa, ou aberta. Se for aberta, ache um ou mais valores para as variáveis que tornem a sentença verdadeira. Os três primeiros itens são exemplos.

x) $3 \cdot 4 = 7$ **Sentença falsa.**
y) $5 + 2 \leq 7$ **Sentença verdadeira.**
z) $4x = 8$ **Sentença aberta.** Ela torna-se verdadeira se x = 2
a) $0,6 \cdot 4 = 24 \div 10$ ...
b) $x + y = 17$
c) $5a = 10$
d) $3^3 = 81$
e) $5 + t = 35$
f) $\frac{x}{y} = 1$

Antes de continuar lendo, certifique-se de que você tem claro o significado dos seguintes conceitos:

Expressão algébrica (exemplo: $x + 4$)

Variável (exemplo: x)

Valor numérico de uma expressão algébrica (exeplo: se $x = 4$, então $x + 4$ vale 8

Sentença matemática (exemplo: $x + 4 = y$)

Equações

O termo **equação** provém etimologicamente da palavra latina *æquatĭo*, que significa igualação ou igualdade. Uma equação é uma sentença matemática com uma ou mais variáveis e que afirma uma **igualdade**. Em outras palavras, é uma expressão matemática com letras, números, operadores e um símbolo de igual (=). Note que uma equação é uma sentença com uma ou mais variáveis e, portanto, é sempre uma sentença aberta.

Exercício 02.5 Quando uma transação financeira é feita com dinheiro vivo (ou seja, cédulas e moedas), muitas vezes se faz necessário que o fornecedor dê troco para o comprador. Por exemplo, quem compra uma maçã de R$ 2,75 usando uma nota de 5 reais deve receber um troco de R$ 2,25. Considere que a variável t representa o troco, que a variável p representa o preço da mercadoria a ser paga, e que q quanto o cliente deu em dinheiro vivo. Em seguida, observe as equações abaixo:

i) $p + q = t$
ii) $p + t = q$
iii) $t + q = p$
iv) $q - p = t$
v) $t - p = q$

Qual ou quais equações acima representam uma situação de compra com troco?

Exercício 02.6 Considere a seguinte afirmação: “a soma de dois números consecutivos é 53”. Em seguida, observe as seguintes equações:

i) $x + y = 53$
ii) $a + (a + 1) = 53$
iii) $p + 1 = 53 + q$

Qual ou quais das equações acima expressam a situação que a afirmação apresenta? Se mais de uma equação expressa a situação, qual é a diferença entre elas?

Exercício 02.7

a) Complete tabela abaixo, cujas linhas dizem respeito a uma lista de equações e cujas colunas indicam, a respeito dessas equações, o seguinte:

- Se a sentença é uma equação ou não;
- Exemplos de valores para as variáveis que tornam a sentença verdadeira;

- Quantas combinações de valores para as variáveis tornam a sentença verdadeira: uma, duas, muitas ou nenhuma?

Use as primeiras três linhas como exemplo.

equação	**exemplos de valores para as variáveis que tornam a sentença verdadeira**	**quantos valores tornam a sentença verdadeira: um, muitos ou nenhum?**
$4x = 8$	$x = 2$	um
$i = j$	$i = 1\ e\ j = 1$ $i = 2\ e\ j = 2$ $i = 3\ e\ j = 3$ $i = 15\ e\ j = 15$ ...	muitos
$5x - 3 = 42$		
$2(a + b) = 0$		
$0 \cdot t = 15$		
$x = 2y$		
$c = c + 3$		
$3y - 4 = 11$		
$4(x + 2) = 36$		

Em seguida, analise a tabela e responda:

b) Que características deve ter uma equação para haja no máximo uma combinação de valores para as variáveis que a tornem verdadeira? Ou seja, que características têm as sentenças com "nenhum" ou "um" na última coluna?

c) Que características têm as sentenças com ou "muitos" na última coluna?

Resolução de equações

Definimos que **uma solução** de uma equação é uma combinação de valores para as variáveis dela que a tornam verdadeira. Definimos também que **resolver** uma equação é achar o conjunto de *todas* as soluções daquela equação. Repare que no exercício anterior a terceira coluna pedia *exemplos* de valores para as variáveis que tornavam a sentença verdadeira. Fornecer alguns exemplos de **soluções** não é o mesmo que **resolver**: é necessário fornecer todas elas.

Vamos começar com os casos mais simples. Talvez você tenha percebido no exercício anterior que se uma equação contém somente **uma variável**[7], então existe **no máximo uma** solução. Por exemplo, a equação

$$3y - 4 = 11$$

torna-se verdadeira se e somente se $y = 5$. Veja:

$$3y - 4 = 11$$
$$3 \cdot 5 - 4 = 11$$
$$15 - 4 = 11$$

É verdade que quinze menos quatro é igual a 11. Assim, $y = 5$ é a única **solução** da equação $3y - 4 = 11$. Logo, a equação está **resolvida**.

Exercício 02.8 Resolva as equações abaixo. Note que todas contém somente uma variável.

i) $3n - 1 = 14$
ii) $2z + 2 = 6$
iii) $5j = 25$
iv) $4 = x + 5$
v) $a = 3 - 2a$

As equações que não tem essa característica especial de conter somente uma variável também podem ser resolvidas. Considere, por exemplo a equação

$$2(a + b) = 0$$

[7] e se essa variável não estiver potenciada (ou seja, se estiver elevada a um)

que poderia ser lida como “o dobro da soma do número *a* com o número *b* é igual a zero”. Talvez você tenha percebido no exercício anterior que existem *muitos* valores para *a* e *b* que tornam essa equação verdadeira:

$a = 0$ e $b = 0$
$a = 1$ e $b =- 1$
$a =- 1$ e $b = 1$
$a = 2$ e $b =- 2$
$a = 2021$ e $b =- 2021$

Na verdade, a gente sempre pode adicionar mais uma solução a essa lista. Isso quer dizer que equações como essa têm *infinitas* soluções. Bom, se resolver equações quer dizer apresentar *todas* as soluções, será que é possível resolver uma equação como essa? Teremos que apresentar uma lista infinita?

No futuro teremos as ferramentas necessárias para responder essa pergunta com mais precisão. Por agora, basta notar que em equações desse tipo podemos determinar em que condições que essa equação torna-se verdadeira. No nosso exemplo, podemos dizer que a equação é verdadeira sempre que a for o oposto de b (ou seja, $a =- b$).

O grau da equação

Antes de passar ao próximo assunto, vamos precisar entender o que significa elevar um número à primeira potência (“elevar a um”). Veja::

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
$5^1 = 5$

Note que elevar à primeira potência é a mesma coisa que não fazer nada! Ou seja, qualquer que seja o valor de n,

$n^1 = n$

Dizemos que uma equação é de **primeiro grau** quando todas as variáveis aparecem elevadas a um, ou seja, quando elas aparecem sem expoente. Se alguma variável aparece numa equação elevada a dois, dizemos que essa equação é de **segundo grau**, e assim por diante[8]. Veja exemplos:

$4z = x + 5$	1º grau
$4^2 z = x + 5^2$	1º grau
$4z^2 = x + 5$	2º grau
$4z^3 = x^2 + y$	3º grau
$a^{10} = b^2 + c^3 + d^4$	10º grau

Essa distinção nos interessa quando queremos saber o número de soluções que uma determinada equação tem. Vamos resolver a seguinte equação:

$$x^2 = 9$$

Que é o mesmo que responder à pergunta: que número vezes ele mesmo resulta em nove? Não deve ser difícil lembrar que $3 \cdot 3 = 9$, logo, três é uma solução. Acontece que não é a *única* solução. Talvez você tenha percebido que o menos três também é solução:

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

Esse exemplo ilustra que equações de grau maior do que um, mesmo as que só têm uma variável, podem ter mais de uma solução. Isso não vale, no entanto, para as de primeiro grau: *equações de primeiro grau com uma variável têm no máximo uma solução*. Ou seja: é fácil de resolver.

Por causa dessa propriedade, nesse primeiro momento, vamos nos limitar a estudar as **equações de primeiro grau com uma variável**. Por exemplo:

$$4a = 104$$

Sabemos que só existe um valor para a variável a que satisfaz a equação. É natural que tentemos *descobrir* que valor é esse. Nesse contexto, é comum chamá-la de **incógnita** ao invés de variável, visto que não estamos tão preocupados com todos os valores sobre os quais ela pode variar, e sim com o único valor que, ao assumir, satisfaz a equação

[8] De modo geral, dizemos que uma equação tem **grau *n*** se houver pelo menos uma variável elevada a *n* e nenhuma variável elevada a um número maior que *n*. Essa definição serve somente para equações em que as variáveis não estão multiplicadas entre si. Caso haja multiplicação entre variáveis, o grau da equação é definido pela maior soma de expoentes de variáveis que estão multiplicadas. Por exemplo, $x^2y^3 + z^4 = 0$ é uma equação de quinto grau. Mas essa distinção não é muito importante para nossos propósitos.

O vocabulário está se acumulando! São vários nomes, mas as ideias por trás deles são relativamente simples. Note que cada conceito apresentado é usado para definir os próximos:

Expressão algébrica - expressão com letras, números e operações

Variável - uma letra dentro de uma expressão algébrica

Valor numérico de uma expressão algébrica - o que acontece quando substituímos alguma variável por um número

Sentença matemática - uma expressão que afirma algo (que inclui =, <, >, etc)

Equação - uma sentença que afirma uma igualdade (que inclui =)

Solução da equação - valores para as variáveis que satisfazem a equação

Resolver a equação - achar todas as soluções

Grau da equação - o maior expoente que aparece numa variável

Incógnita - outro nome para variável

Se tiver dúvida sobre o significado de qualquer uma dessas palavras, procure no texto onde essas palavras foram introduzidas (elas aparecem em negrito) e releia. Se a dúvida persistir, procure ajuda do professor ou de colegas.

A balança de dois pratos

É uma dos meios mais antigos[9] de descobrir ou comparar o peso de objetos. Em sua forma mais simples, consiste em dois pratos pendurados nas duas pontas de um eixo suspenso pelo seu centro, de forma que os dois pratos mantêm a mesma altura desde que o peso dos objetos sobre eles seja o mesmo.

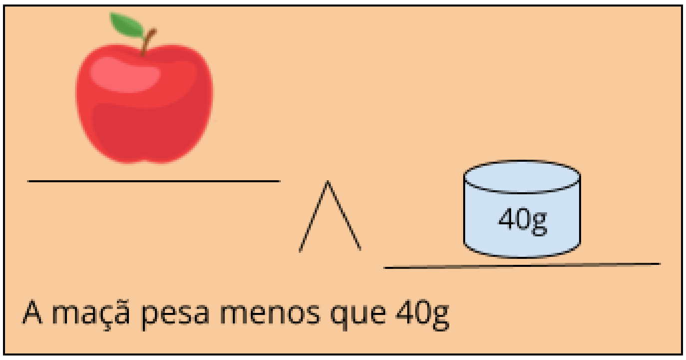
Esse tipo de balança, a princípio, não pode ser usado para medir o *valor absoluto* do peso de objetos: ela só faz **comparar** o peso de duas coisas, ou

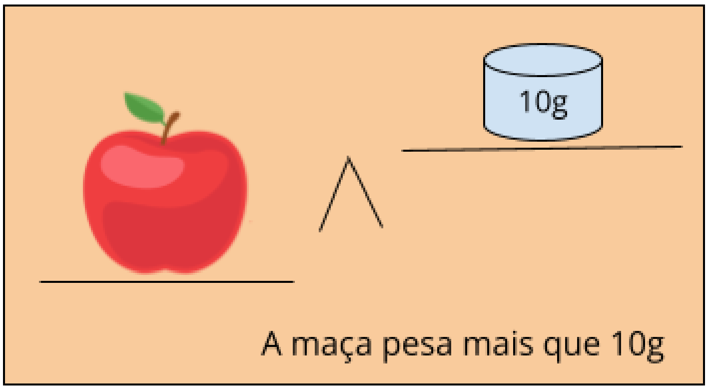
[9] O nome *balança*, inclusive, vem do latim *bis* - dois e *linx* - prato (fonte)

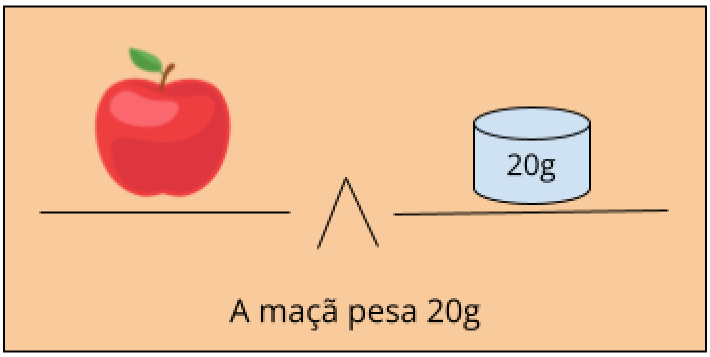
seja, dizer se um objeto é mais, menos ou igualmente pesado que outro. Isso é diferente de uma balança eletrônica, por exemplo, que te dá o peso em gramas ou quilogramas do que quer que você coloque em cima dela.

Se houver, no entanto, objetos com pesos absolutos conhecidos, é possível determinar o valor absoluto do peso de outros objetos também, ao comparar uma coisa com a outra. Esse é o papel desses pequenos cilindros de metal que se vê na foto acima.

Por exemplo, suponha que você quer descobrir o peso de uma maçã. Você coloca essa maçã em um prato, e um peso de 20g no outro. Se os pratos estiverem equilibrados (*balanceados)*, ou seja, se um prato estiver na mesma altura que o outro, isso quer dizer que a maçã pesa 20g.







Exercício 02.9 Um comerciante de especiarias recebeu de seu fornecedor pequenos sacos de pimenta-do-reino. Neles lê-se:

i) 4g
ii) 10g
iii) 12g
iv) 8g
v) 5g

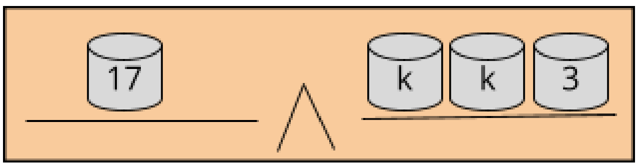
O comerciante, no entanto, desconfia que o fornecedor não tenha pesado os produtos corretamente. Provido apenas de uma balança de pratos, um peso de 1g, um de 3g e um de 9g, deseja conferir se o peso declarado corresponde ao peso real dos produtos. Para cada um dos cinco sacos descritos acima, que pesos o comerciante deve usar em cada prato de sua balança para fazer essa conferência[10]?

A equação e a balança

Pode parecer estranho uma passagem sobre balanças de prato no meio de uma atividade sobre álgebra, mas uma equação tem muito em comum com uma balança de pratos equilibrada[11]. Já dissemos que uma equação **afirma uma igualdade** entre valores. A balança equilibrada, ou seja, com pratos na mesma altura, **afirma uma igualdade** de pesos. Remeter a essa analogia vai nos ajudar a resolver equações. Por exemplo, considere a seguinte equação:

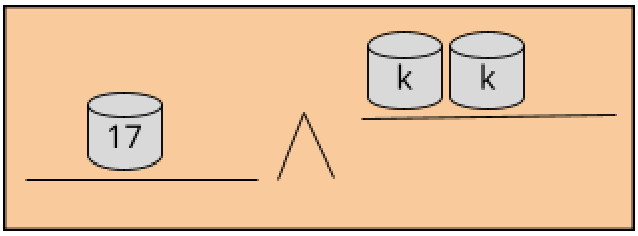
$$17 = 3 + 2k$$

Poderíamos representá-la como uma balança. Em um prato, vai uma peça de peso 17. No outro, uma peça de peso 3 e duas de peso k. O símbolo de igual é traduzido pelo fato de que a balança está equilibrada.

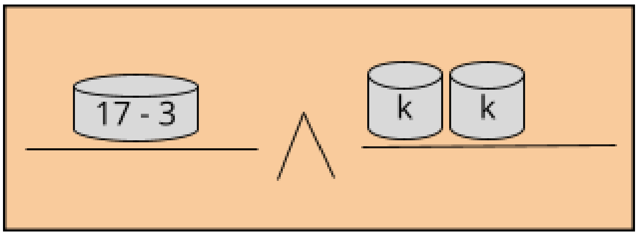


[10] *Desafio 1*: faça esse exercício para todos os números inteiros de 1 a 13.
Desafio 2: mostre que se tivermos peças de peso 1, 3, 3^2 e 3^3 (uma de cada), poderemos pesar todos os valores inteiros de 1 até 40.
Desafio 3 (esse é difícil mesmo): mostre que se tivermos peças de peso 1, 3, 3^2, 3^3 ... 3^n, poderemos pesar todos os valores inteiros de 1 até a soma de todos esses pesos.
[11] assim como uma *inequação* tem muito a ver com uma balança desequilibrada...

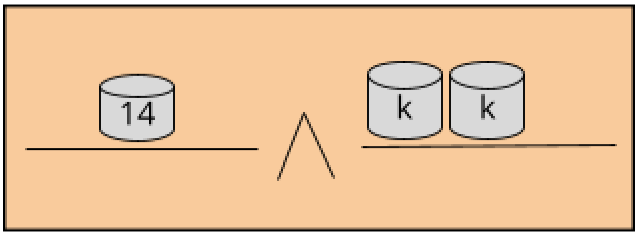
Queremos descobrir o valor da incógnita k (ou então: queremos descobrir que valor para a variável k torna a igualdade verdadeira). Se retirarmos a peça de peso 3 do lado direito, a balança pende para a esquerda:



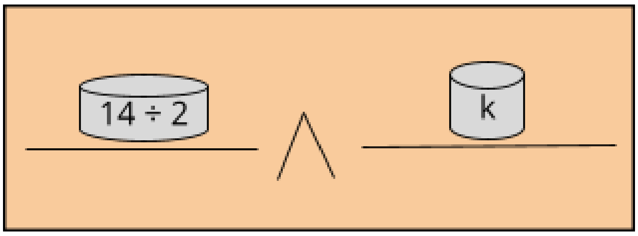
Para restaurar o equilíbrio à balança, teremos que retirar 3 do lado esquerdo também. Vamos trocar, então, a peça de peso 17 por uma peça de peso $17 - 3$



Mas $17 - 3 = 14$, então temos:



Falta pouco para descobrirmos o valor de k. Agora não adianta tentarmos subtrair k de 14, pois não temos o valor da incógnita ainda. Podemos perceber, no entanto, que o peso de $2k$ é o dobro do peso de k, logo, 14 é o dobro do peso de k: basta dividir 14 por 2.



Pronto! O valor para k que torna a equação verdadeira é 7. Algebricamente, o processo é o seguinte:

$17 = 3 + 2k$
$17 - 3 = 3 + 2k - 3$ - Retiramos 3 dos dois lados
$14 = 2k$ - O 3 ”sumiu” do lado direito!
$\frac{14}{2} = \frac{2k}{2}$ - Dividimos por 2 dos dois lados
$7 = k$ - Descobrimos o valor de k!

A peça fundamental desse método de resolução de equações é que sempre podemos fazer a mesma operação dos dois lados da balança. Se sabemos que A é igual a B, então sabemos também que A + 10 é igual a B + 10, assim como 2A = 2B, e A - 3 = B - 3. Se podemos fazer qualquer operação igualmente dos dois lados da equação, como escolher qual operação vamos fazer? Vamos escolher a operação que **isola a incógnita**, ou seja, que deixa ela sozinha de um lado da equação. Veja outro exemplo:

$x + 5 = 8$

(Qual é a operação que podemos fazer nos dois lados dessa equação que vai deixar o x “sozinho”?)

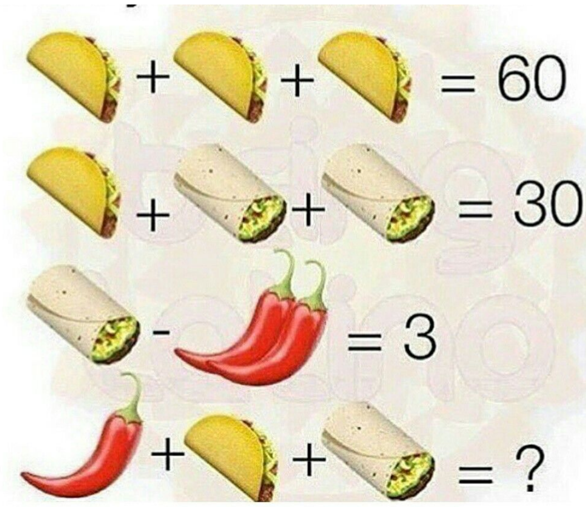
$x + 5 - 5 = 8 - 5$ - Retiramos 5 dos dois lados
$x = 3$

O 5 ”sumiu” do lado esquerdo e o x está sozinho! A incógnita está isolada.

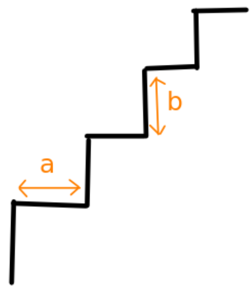
Exercício 02.10 Usando o método descrito acima de isolar a incógnita, resolva as seguintes equações:

a) $2x = 1500$
b) $43 = a + 5$
c) $z + 5,25 = 2501,5$
d) $3a + 4 =- 20$
e) $3a + 4 = 17$
f) $- 3x = x + 27$
g) $6c - 12 = 1434$
h) $0,8t = 160$

Exercício 02.11 Analise a imagem abaixo e forneça equações que correspondam ao problema descrito nela. Em seguida, resolva essas equações, de modo a conseguir responder a pergunta final.



Exercício 02.12 Pedreiros e arquitetos sabem que uma escada bem feita obedece à fórmula $a + 2b = 63$, com a e b dados em centímetros, sendo a um número maior do que 23 e menor do que 35, ou, na linguagem da álgebra, $23 < a < 35$.



Complete a tabela obedecendo à fórmula dada:

a	25		29	31	33
b	19	18			

Exercício 02.13 Para calcular o índice de massa corpórea, os médicos aplicam a seguinte fórmula: $I = \frac{p}{a^2}$, sendo I o índice, p a massa (em quilograma), e a a altura (em metro) da pessoa. Para adultos, a OMS[12] indica que o I ideal para uma pessoa é entre 19 e 25.

a) Uma pessoa com 1,60 m de altura e 60kg está com o índice de massa corporal dentro do ideal?
b) Uma jovem de 1,60m de altura obteve $I = 20$. Qual é a sua massa?
c) "Uma pessoa com IMC acima de 25 deve emagrecer". Você concorda com essa afirmação?

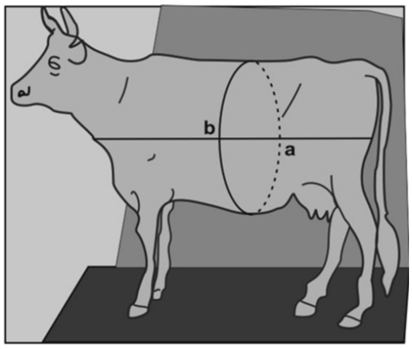
[12] Organização mundial de saúde

Exercício 02.14 Releia, no capítulo “00 - Combinados” qual é o cálculo feito para se chegar na nota final. Em seguida, responda:

a) Um estudante tirou 6,0 na prova, teve nota de participação 8,0, avaliação de caderno 9,0 e 5,0 na nota de atividades. Qual foi a nota final desse estudante?
b) Outra estudante tirou 10,0 na nota de participação, 10,0 na nota de atividades, mas tirou 0 na avaliação do caderno. Que nota ela deve tirar na prova, no mínimo, para ficar com nota final 7,0?

Exercício 02.15 Às vezes, um criador precisa dar remédios a seu gado. A dosagem de remédio depende da massa do animal. No entanto, não é tão simples achar uma balança capaz de medir o peso desses animais, principalmente para criadores sem recursos. Para ajudar os criadores de seu país, moçambique, o professor Paulus Gerdes apresentou uma fórmula para se obter a massa aproximada do gado:

$$M = \frac{ab^2}{4\pi}$$



em que:

M é a massa aproximada do animal em quilograma
a é o comprimento do tronco em decímetro
b é o comprimento da cintura em decímetro
π é a letra grega (dita “pi”) que representa um número de valor aproximado 3,1.

a) Qual é a massa de uma novilha cujo tronco mede 9,3 dm de comprimento e a cintura, 16 dm?
b) Imagine que um tio seu é pequeno criador de gado. Você quer lhe explicar como aplicar a fórmula de Paulus Gerdes. Escreva-lhe uma carta sucinta dando as explicações.

Exercício 02.16 Quanto custa tomar um banho?

As companhias distribuidoras de energia elétrica costumam informar a seus consumidores a fórmula para o gasto de energia de um aparelho elétrico:

$$G = \frac{P \cdot H}{1000}$$

Onde:

- G é o gasto em quilowatt-hora (kWh)
- P é a potência do aparelho em watt (W)
- H é o número de horas que o aparelho funcionou

Por sua vez, o custo de energia elétrica referente ao uso de um equipamento que gastou G kWh é dado por:

$$C = G \cdot R$$

Onde:

- C é o custo em reais
- G é o gasto em quilowatt-hora (kWh), como calculado na fórmula anterior
- R é o custo por quilowatt-hora (R$/kWh)

O objetivo desse exercício é descobrir quanto custa um banho seu. O uso de calculadora é permitido. Anote todas as contas, medições e raciocínios envolvidos. Se você não usa um chuveiro elétrico em casa, leia as instruções ao final do exercício. Os passos envolvidos são:

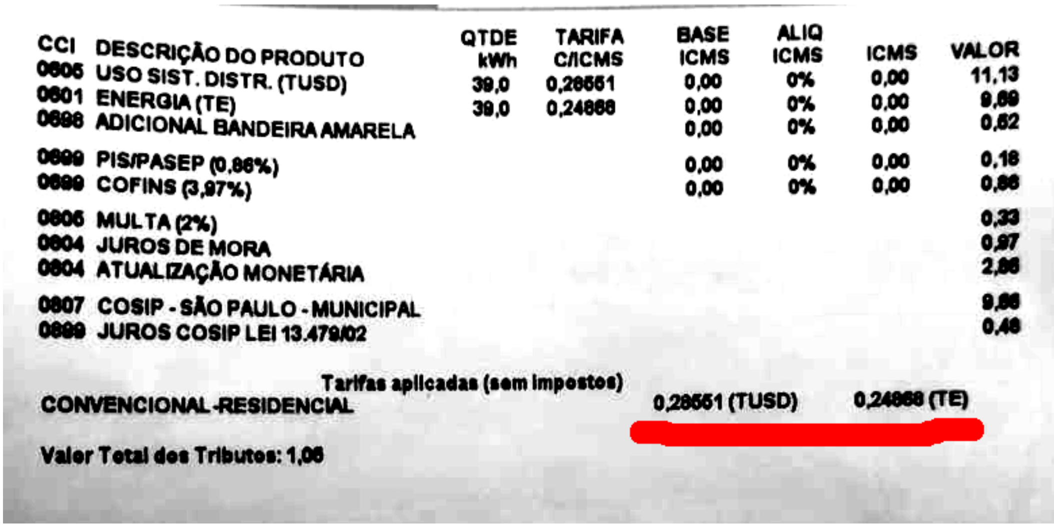
a) Descobrir quanto tempo dura, em média, um banho seu. Para isso, meça o tempo de duração de três banhos seus, em dias diferentes. O valor a ser usado no cálculo deve ser a **média aritmética** dessas três medições[13]. Sejam m_1, m_2 e m_3 as três medições que você fez. Então a média aritmética delas é dada por:

$$\frac{m_1+m_2+m_3}{3}$$

Verifique que as medições foram realizadas em horas, e não em minutos. Por exemplo, se você mediu primeiro um banho durando 5 minutos, depois outro durando 10 minutos e por fim outro durando 7 minutos, considere que $m_1 = 5/60$, $m_2 = 10/60$, $m_3 = 7/60$.

[13] Na verdade, você deve fazer no mínimo três medições. Se desejar fazer mais medições, calcule a média aritmética da seguinte maneira. Sejam m_1, m_2, ..., m_n as n medições que você fez. Então a média aritmética delas é dada por $(m_1 + m_2 + ... + m_n)/n$.

b) Descubra qual é o preço de um kilowatt-hora na sua casa. Para isso, consulte uma conta de luz (peça a um responsável se não souber como encontrar). Provavelmente, o preço de um kilowatt-hora estará dividido entre uma taxa "TUDS" e uma "TE"[14]. Você deve somar ambas para obter o preço total e deve fazer as contas com essa soma. A imagem abaixo ilustra onde encontrar essas informações.



CCI	DESCRIÇÃO DO PRODUTO	QTDE kWh	TARIFA C/ICMS	BASE ICMS	ALIQ ICMS	ICMS	VALOR
0605	USO SIST. DISTR. (TUSD)	39,0	0,28551	0,00	0%	0,00	11,13
0601	ENERGIA (TE)	39,0	0,24868	0,00	0%	0,00	9,69
0698	ADICIONAL BANDEIRA AMARELA			0,00	0%	0,00	0,62
0699	PIS/PASEP (0,86%)			0,00	0%	0,00	0,18
0699	COFINS (3,97%)			0,00	0%	0,00	0,88
0806	MULTA (2%)						0,33
0804	JUROS DE MORA						0,97
0804	ATUALIZAÇÃO MONETÁRIA						2,86
0807	COSIP - SÃO PAULO - MUNICIPAL						9,86
0899	JUROS COSIP LEI 13.479/02						0,48

CONVENCIONAL -RESIDENCIAL Tarifas aplicadas (sem impostos) 0,28551 (TUSD) 0,24868 (TE)

Valor Total dos Tributos: 1,06

c) Descubra a potência do seu chuveiro elétrico. Para isso, você deverá descobrir qual o nome de seu modelo. Para isso, veja se há alguma identificação nele próprio ou se quem o comprou ainda tem uma nota fiscal ou um manual de usuário. Com o nome do modelo em mãos, pesquise na internet sua potência. Suponha, por exemplo, que você descobriu que o modelo do seu chuveiro é "*super ducha quattro*". Uma simples pesquisa no *google* rapidamente revela sua potência, que nesse caso é de 6800 W:

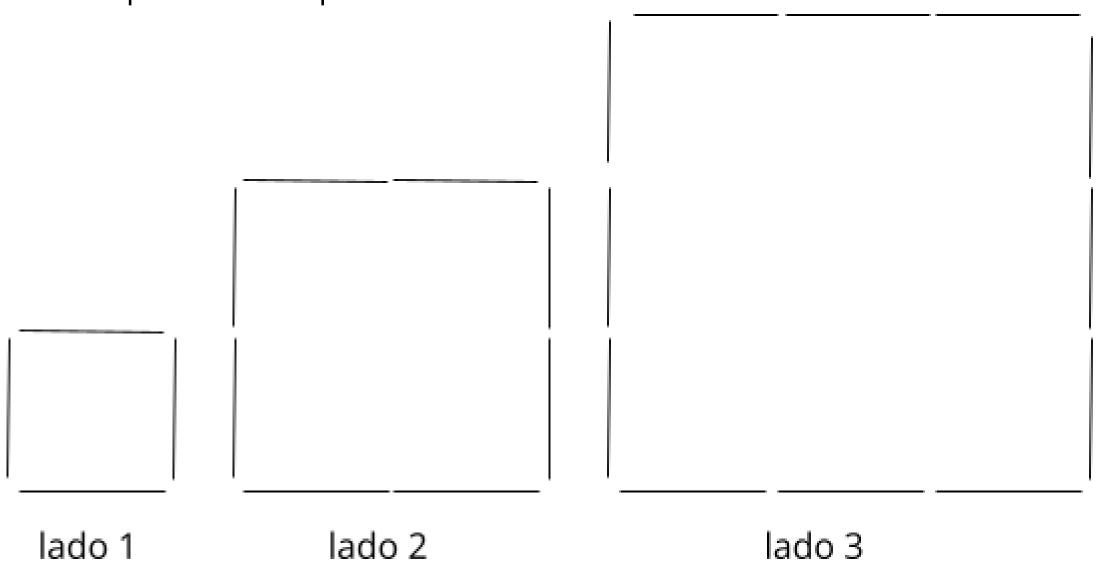
-

[14] A primeira é o que você está pagando para a infraestrutura do sistema elétrico, a segunda é referente ao próprio consumo de energia elétrica. Mas essa distinção não é muito importante para os nossos propósitos.

d) Por fim, com essas informações, use as duas fórmulas apresentadas para descobrir qual é o custo de um banho seu.

Se você não usa um chuveiro elétrico no seu dia a dia (por exemplo, se na sua casa o chuveiro é à gás), você deve escolher outro eletrodoméstico e fazer todos os passos analogamente ao descrito acima. Por exemplo, se você escolher medir o custo de um uso do microondas, você deverá: **a)** fazer três medições do tempo que leva para esquentar um prato, **b)** como acima e **c)** descobrir a potência do seu microondas. Outros exemplos de eletrodomésticos que você pode analisar são: máquina de lavar pratos, máquina de lavar roupas, geladeira, lâmpada, televisão, computador, etc.

Exercício 02.17 Imagine que você está usando palitos de fósforo para formar quadrados. É possível formá-los com lados de vários tamanhos:



a) Construa uma tabela com 10 entradas que relacione o número de palitos no *lado* de um quadrado com o número de palitos no quadrado todo.

b) Explique com suas palavras qual é a relação entre o número de palitos no lado de um quadrado com o número de palitos no quadrado todo. Ou seja, que conta que temos que fazer para chegar de um número ao outro?

c) Qual é o número de palitos necessário para a criação de um quadrado de lado:

i) 4? **ii)** 6? **iii)** 10? **iv)** 73?

d) Qual é o número de palitos necessários para a criação de um quadrado de lado **n**?

e) Forneça uma equação que relacione o número de palitos no lado de um quadrado com o número total de palitos no quadrado.

f) Forneça uma equação que relacione o número de palitos num quadrado com o número de palitos no quadrado cujo lado tem um palito a menos do que aquele[15].

Exercício 02.18 Ao invés de formar quadrados com os palitos de fósforo, vamos agora formar *frisas* de quadrados, como nos exemplos abaixo

a) Construa uma tabela com 10 entradas que relacione o número de quadrados com o número de palitos na frisa.

b) Explique com suas palavras qual é a relação entre o número de quadrados com o número de palitos no frisa. Ou seja, qual é a conta que temos que fazer para chegar de um número ao outro?

c) Qual é o número de palitos necessário para a criação de uma frisa com:

- **i)** 4 quadrados
- **ii)** 6 quadrados
- **iii)** 10 quadrados
- **iv)** 73 quadrados

d) Qual é o número de palitos necessários para a criação de uma frisa com **n** quadrados?

e) Forneça uma equação que relacione o número de quadrados numa frisa com o número total de palitos na frisa.

f) Forneça uma equação que relacione o número de palitos numa frisa com o número de palitos na frisa com um quadrado a menos que aquela[16].

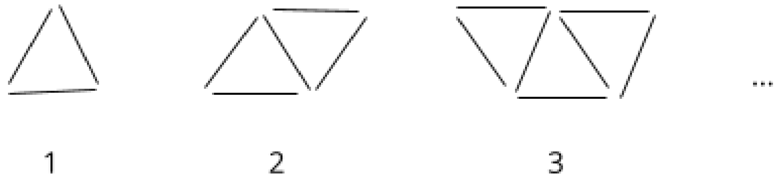
---

[15] Em outras palavras, forneça o número de palitos num quadrado de lado **n** em função do número de palitos no quadrado de lado **n - 1**

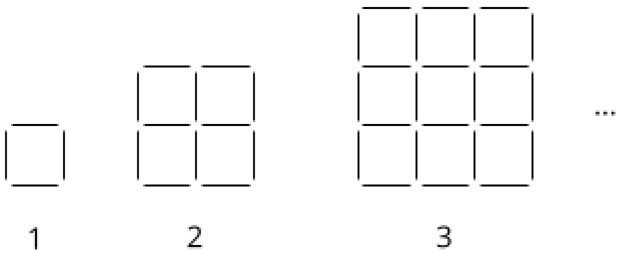
[16] Em outras palavra, forneça uma equação que relacione o número de palitos numa frisa com **n** quadrados com o número de palitos numa frisa com **n - 1** quadrados

Exercício 02.19 Refaça o exercício anterior considerando, ao invés da frisa de quadrados, as seguintes frisas:

a)

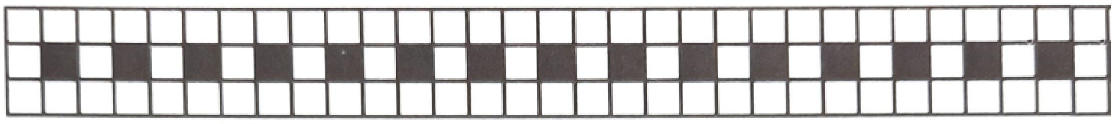


b)



Álgebra dos ladrilhos

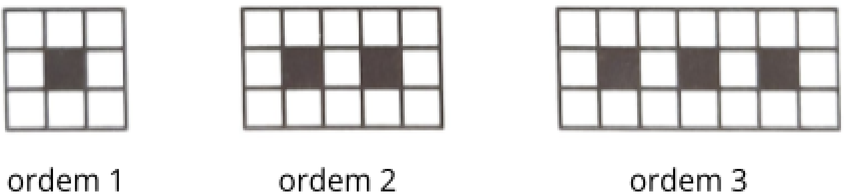
Imagine uma faixa formada por ladrilhos pretos e brancos, como na figura a seguir:



Uma **faixa** é formada por três camadas:

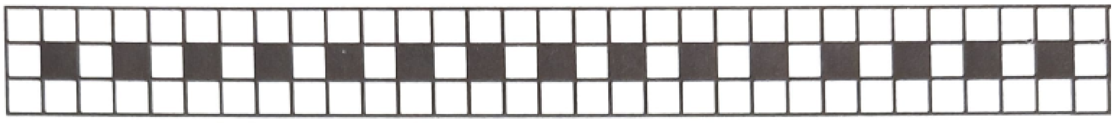
- a primeira e a terceira camada têm apenas ladrilhos brancos;
- a segunda camada alterna ladrilhos brancos e pretos

Uma **faixa completa** começa e termina com ladrilhos brancos na camada do meio. A **ordem** de cada faixa é determinada pelo número de ladrilhos pretos, ou seja, uma faixa de **ordem *n*** tem exatamente *n* ladrilhos pretos na camada do meio.



Exercício 02.20

a) Qual é a ordem da faixa abaixo?



b) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa

i) de ordem 17?
ii) de ordem 247?
iii) de ordem *n*?

c) Dê o número de ladrilhos brancos que tem uma faixa de ordem:

i) 1 **ii)** 2 **iii)** 3 **iv)** 4 **v)** 10 **vi)** 50

d) Construa uma tabela de 10 linhas com o seguinte cabeçalho:

ordem da faixa (***o***)	ladrilhos pretos (***p***)	ladrilhos brancos (***b***)	número de colunas (***c***)	número total de ladrilhos (***t***)

e) Em cada item, forneça uma equação que:

i) Relacione *t* com *p* e *b*
ii) Relacione *t* com *c*
iii) Relacione *p* com *b*
iv) Relacione *o* com *c*

f) Determine *b*, *p* e *c* de uma faixa de ordem 18.

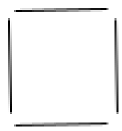
g) É possível construir uma faixa com exatamente 1000 ladrilhos brancos?

- Se sim: qual a ordem da faixa que tem 1000 ladrilhos brancos?
- Se não: sobram ladrilhos? Quantos?

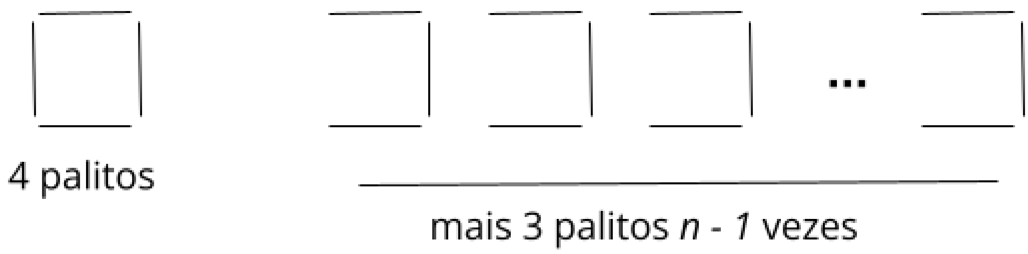
Fórmulas equivalentes

O exercício 14e) pedia uma equação que relacionasse o número de quadrados numa frisa com o número de palitos nela. Dois raciocínios comuns para chegar a essa equação são os seguintes:

Raciocínio 1. Se eu tenho *n* quadrados, então eu preciso de 4 palitos no começo:



e para cada quadrado restante, eu coloco mais três palitos. Como eu já coloquei o primeiro quadrado, vou precisar fazer isso *n - 1* vezes:

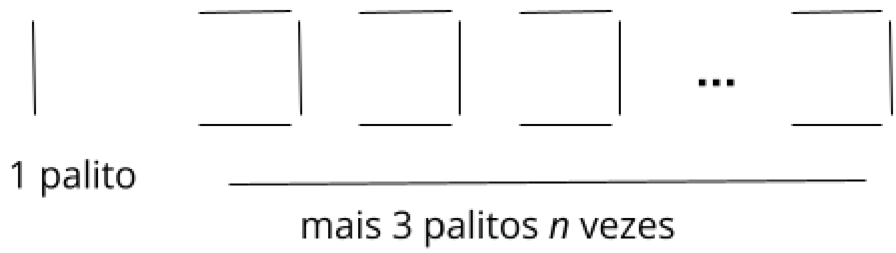


Logo, o número de palitos *P* é dado por:

$$P = 4 + 3(n - 1)$$

Raciocínio 2. Se eu tenho *n* quadrados, então eu preciso de 1 palito no início:

E, para cada quadrado na frisa, eu preciso colocar mais três palitos:



Assim, o número de palitos *P* é dado por:

$$P = 1 + 3n$$

Os dois raciocínios estão corretos, o que quer dizer que as duas equações representam o mesmo problema, corretamente. Logo, as duas equações representam *a mesma coisa*. Para qualquer *n*,

$$P = 4 + 3(n - 1)$$

e ao mesmo tempo

$$P = 1 + 3n$$

Mas se uma coisa é igual a outras duas, então essas outras duas são iguais entre si também!

$$4 + 3(n - 1) = P = 1 + 3n$$

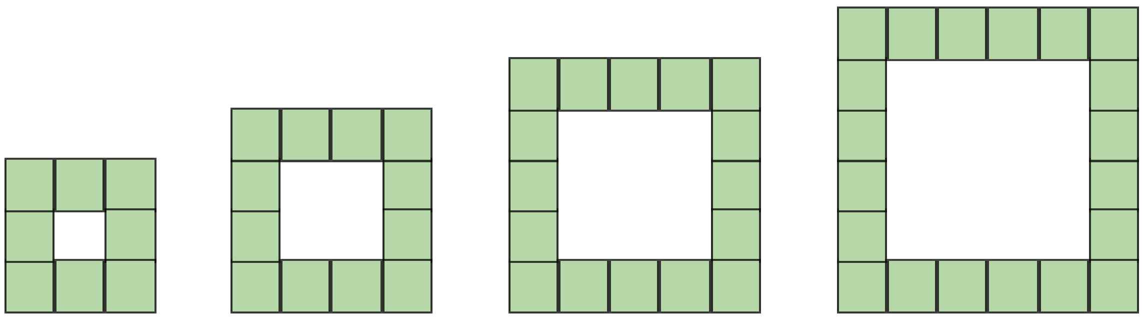
e logo

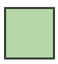
$$4 + 3(n - 1) = 1 + 3n$$

Essa equação é verdadeira para **qualquer *n***! Em casos assim, dizemos que as equações $P = 4 + 3(n - 1)$ e $P = 1 + 3n$ são **equivalentes**.

Exercício 02.21[17] Considere o problema dos ladrilhos do exercício 16. Ache duas equações equivalentes que relacionem a ordem de uma faixa com o número de ladrilhos brancos nela.

Exercício 02.22. Considere as “molduras” quadradas, representadas pela sequência abaixo:



Cada unidade  será chamada **ladrilho**.

Dizemos que uma moldura é de **ordem n** quando há n ladrilhos em um de seus lados. Definimos M_n como o número de ladrilhos necessários para compor uma moldura de ordem n.

a) Calcule:

i) M_3 **ii)** M_5 **iii)** M_6

iv) M_{10} **v)** M_1

[17] Opcionalmente, se quiser continuar estudando: **i)** repita esse exercício para as frisas do exercício 15. **ii)** Pesquise sobre a *propriedade distributiva* e, a partir dela, mostre que as equações apresentadas na seção “Fórmulas equivalentes” são de fato equivalentes.

b) Indique a ordem da moldura que tem ao todo:

i) 44 ladrilhos **ii)** 60 ladrilhos **iii)** 400 ladrilhos

c) Forneça uma equação que relacione M_n com n.

d) Forneça uma equação diferente porém equivalente àquela do item **c)**.

e) Uma pessoa dispõe de uma caixa com 1001 ladrilhos. Qual é a ordem da maior moldura que ela pode fazer com os ladrilhos desta caixa?

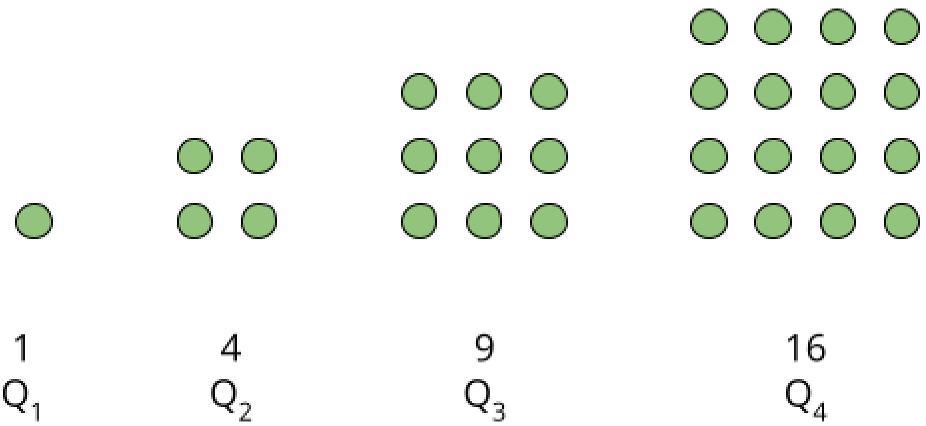
f) Considere a fórmula $M_n = n^2 - (n - 2)^2$.

i) Verifique se essa equação é equivalente àquela a que você chegou no item **c)**.

ii) Explique com suas palavras ou com um desenho qual é a ideia por trás dessa fórmula. Para isso, tente imaginar uma figura que corresponda ao n^2 e outra que corresponda a $(n - 2)^2$.

Números quadrados

São os seguintes:



Um número da forma n^2, com n natural, é chamado **quadrado perfeito** ou **número quadrado**. Deve-se aos antigos gregos tal denominação. A associação entre forma e número foi estudada pelos gregos para outros tipos de números como os triangulares, retangulares, pentagonais, hexagonais ou os piramidais. A característica da disposição *quadrada* é ter o número de linhas igual ao número de colunas. A fórmula dos números quadrados é a seguinte:

$$Q_n = n^2$$

Exercício 02.23.

a) Calcule:

i) Q_{13} **ii)** Q_{24} **iii)** Q_{402} **iv)** Q_0

b) Indique qual é o valor de n em cada item:

i) $Q_n = 144$ **ii)** $Q_n = 256$ **iii)** $Q_n = 2500$

iv) $Q_n = 9409$ **v)** $Q_n = 1$ **vi)** $Q_n = 0$

c)

i) Decomponha o 5º número quadrado em uma soma de 5 números ímpares;

ii) Decomponha o 4º número quadrado em uma soma de números ímpares diferentes

d) Encontre:

i) o 7º número ímpar
ii) o 15º número ímpar
iii) o 20º número ímpar
iv) o 41º número ímpar
v) o n-ésimo número ímpar

O quadrado como soma de ímpares

A sequência dos quadrados perfeitos tem muitas regularidades observáveis. Uma das mais interessantes é a que relaciona um quadrado perfeito com a soma dos números ímpares.

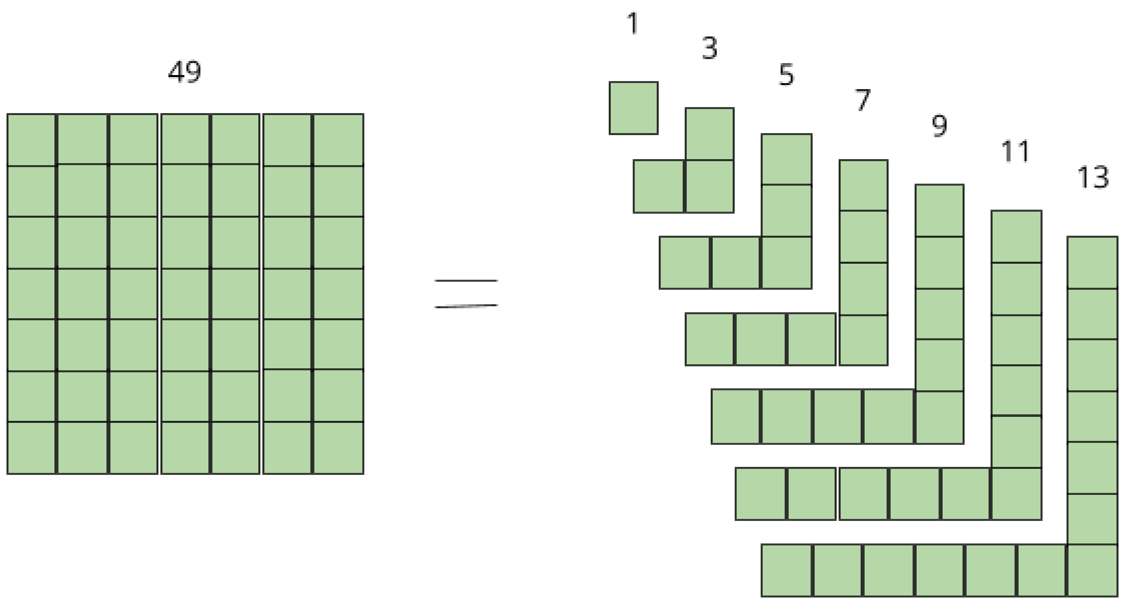
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

+1 +3 +5 +7 +9 +11 +13 +15 +17 +19

A sequência das diferenças entre dois números quadrados consecutivos é a sequência dos números ímpares. Acompanhe a decomposição do 7º quadrado, o 49:

$$
\begin{aligned}
Q_7 &= 49\\
&= 36 + 13\\
&= 25 + 11 + 13\\
&= 16 + 9 + 11 + 13\\
&= 4 + 7 + 11 + 13\\
&= 1 + 3 + 7 + 11 + 13
\end{aligned}
$$

Ou seja, somando-se os sete primeiros números ímpares obtêm-se o sétimo número quadrado!



Exercício 02.23

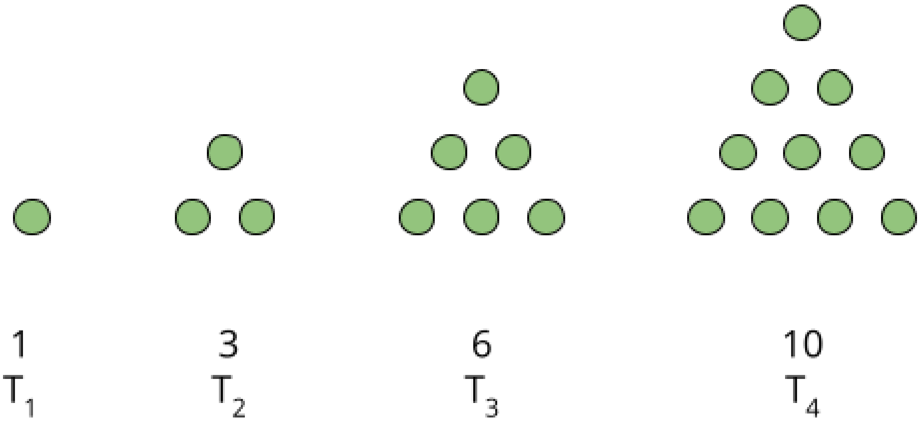
a) Como obter o 13º número quadrado com o auxílio de uma calculadora simples, em que o botão de multiplicação está quebrado?

b) Qual é o maior número ímpar utilizado na decomposição de n^2 como soma de ímpares, como descrito acima?

c) Forneça uma equação que descreva a decomposição de n^2 como soma de ímpares, como descrito acima (valendo-se dos "três pontinhos").

Números triangulares

São aqueles que, numa certa configuração, formam o desenho de triângulos.



Definimos T_n como o n-ésimo número triangular. Assim,

$T_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n$

Logo,

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

Mas também temos

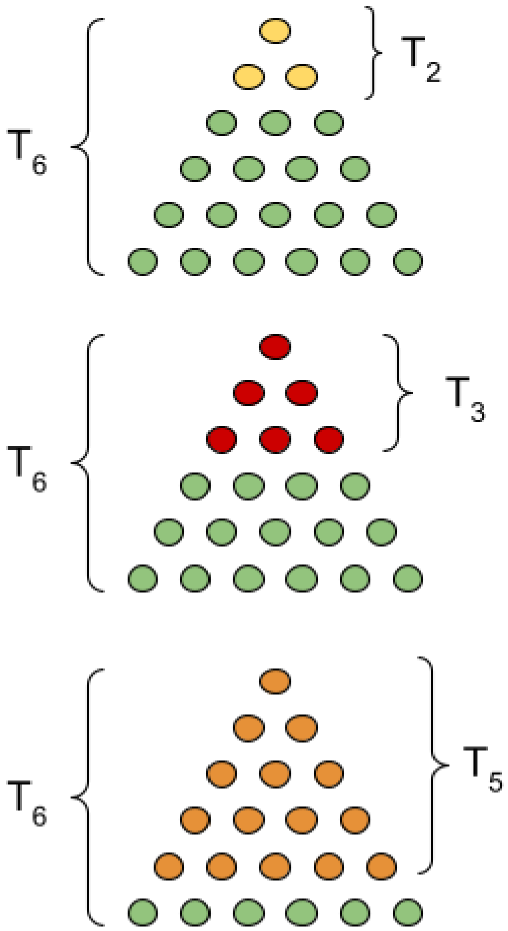
$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Mas veja que T_5 aparece dentro de T_6! Isso quer dizer que

$$T_6 = T_5 + 6$$

O que faz sentido, se olharmos a figura ao lado. Repare que o topo de todo triângulo é sempre outro triângulo menor. De modo geral, temos:

$$T_n = T_{n-1} + n$$



Exercício 02.24

a) Dê o valor dos 10 primeiros números triangulares.

b) Sabendo que $T_{25} = 325$, determine o valor de T_{24} e de T_{26}.

c) Dê o valor das diferenças:

i) $T_{54} - T_{53}$ **ii)** $T_{47} - T_{46}$ **iii)** $T_{100} - T_{99}$

iv) $T_{n} - T_{n-1}$

Somando sequências

É relativamente fácil realizar a soma para descobrir o 10º número triangular:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

Mas é uma conta trabalhosa de se fazer. E se quiséssemos, ainda por cima, achar o 50º número triangular? Ou o 100º? Esse problema foi resolvido, com bastante engenhosidade, por um garoto chamado Gauss, que mais tarde tornou-se um dos maiores matemáticos da história.

Conta-se que, aos nove anos de idade, Gauss era um aluno bastante irrequieto. Certa vez, num daqueles dias de bagunça, seu professor, a fim de fazê-lo ficar quieto e concentrado, ordenou-lhe que encontrasse a soma dos 100 primeiros números naturais.

Para surpresa de todos, três minutos depois da ordem, Gauss deu a resposta certa: 5050. Como ele teria feito o cálculo com tanta rapidez? Sua sacada foi a seguinte:

$$T_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$
$$T_{10} = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

Ele percebeu que se escrevesse a mesma soma em ordem crescente e depois em ordem decrescente, um padrão surgiria. Se você somar cada número com o que está logo abaixo, o resultado é sempre o mesmo! Gauss então somou os dois jeitos de escrever a mesma coisa:

$$T_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$
$$T_{10} = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

11 11 11 11

$$T_{10} + T_{10} = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11$$
$$2 \cdot T_{10} = 10 \cdot 11$$
$$2 \cdot T_{10} = 110$$
$$T_{10} = 55$$

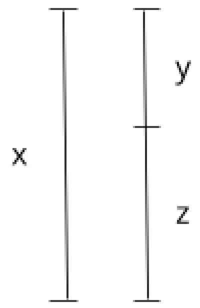
Exercício 02.25

a) Use raciocínio semelhante para achar T_{24}, T_{29}, T_{99} e T_{1000}.
b) Faça a soma de todos os números inteiros entre e inclusive o 4 e o 16.
c) Determine a soma dos primeiros 20 primeiros números pares positivos.
d) Calcule a soma dos primeiros 30 primeiros múltiplos de 3 positivos.
e) Calcule a soma dos 10 primeiros múltiplos positivos de 10.
f) Compare o resultado do item anterior com a soma dos 10 primeiros inteiros positivos. O que você conclui?
g) Calcule a soma dos primeiros 30 ímpares positivos.

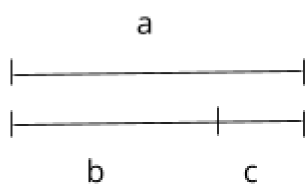
Exercício 02.26 Utilizando o método de Gauss, deduza a equação que define um número triangular. Em outras palavras, encontre uma equação que relacione T_n com n.

Álgebra para comprimentos

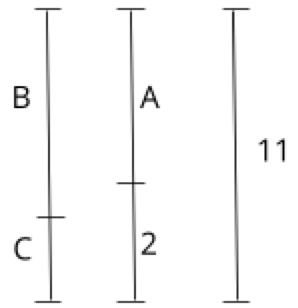
As variáveis usadas na álgebra podem ser usadas para expressar medidas de comprimento. Isso será útil para expressar relações entre eles. Veja:



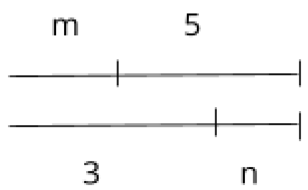
$x = y + z$
$y = x - z$
$z = x - y$



$a = b + c$
$b = a - c$
$c = a - b$



$B = A + 2 - C$
$B > A$
$C > 2$
$A + 2 = 11$
$A = 9$
$B > 9$



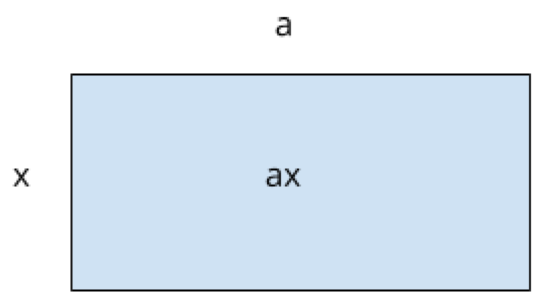
$m = (n + 3) - 5$
$m = n - 2$

$n = (m + 5) - 3$
$n = m + 2$

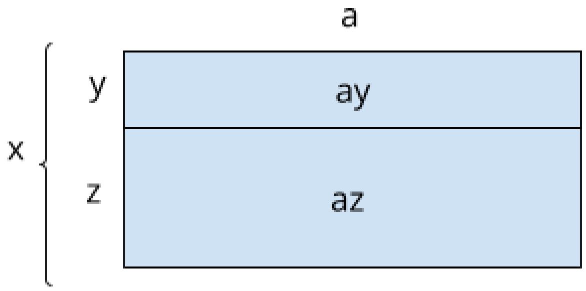
$m < 3$
$n < 5$

Decompondo retângulos

Considere o retângulo de lados *a* e *x* abaixo.



A área desse retângulo é dada por A = *ax*. Veja agora essa mesma figura decomposta em dois retângulos:



$$A = ax$$

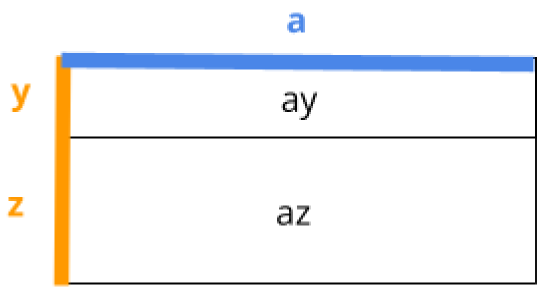
$$x = y + z$$

$$A = a(y + z)$$

$$A = ay + az$$

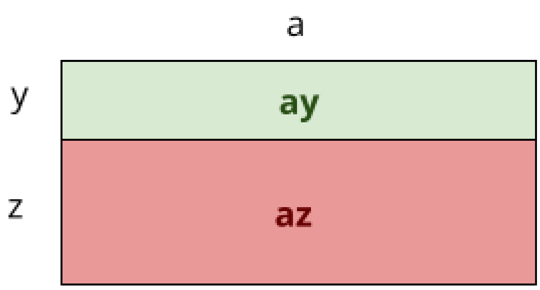
Note que podemos calcular essa área de duas formas. Primeiro, podemos multiplicar o comprimento da base pelo comprimento da altura, obtendo:

$$A = a(y + z)$$



Mas também podemos fazer esse cálculo somando as áreas obtidas nos dois retângulos internos:

$$A = ay + az$$



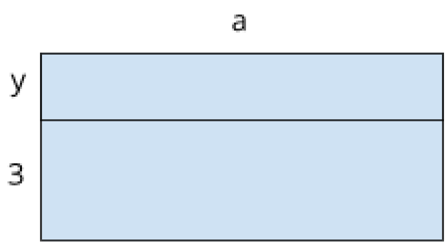
Mas os dois jeitos de achar a área estão corretos. Isso quer dizer que os dois devem valer sempre a mesma coisa! Como sabemos, trata-se de duas equações equivalentes. Em outras palavras,

$$A = a(y + z) = ay + az$$

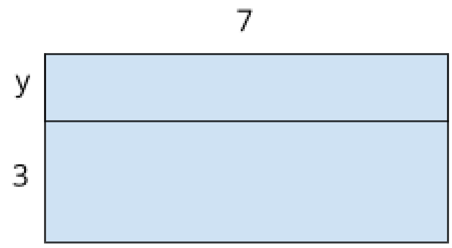
Exercício 02.27 Volte à seção “Álgebra dos comprimentos” e analise a figura em seu início. Uma das sentenças apresentadas está errada. Descubra qual é.

Exercício 02.28 Expresse algebricamente as áreas das figuras abaixo:

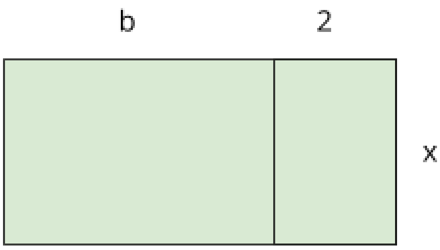
a)



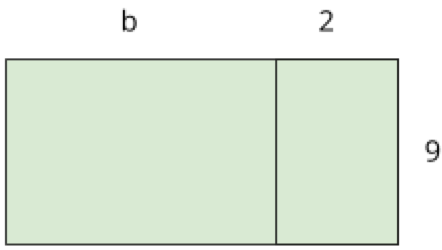
b)



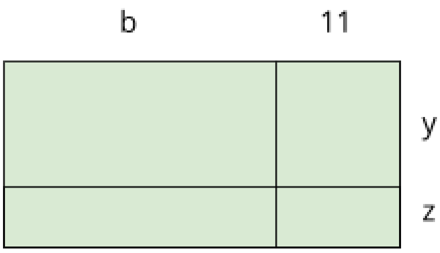
c)



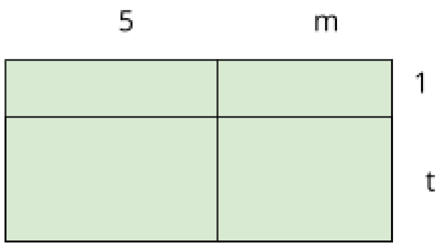
d)



e)



f)



Exercício 02.29 Recorte quatro retângulo com as seguintes especificações:

- 2×3 cm
- $2 \times m$ cm;
- $3 \times t$ cm;
- $m \times t$ cm.

Você pode escolher as dimensões *m* e *t* à vontade. Com os quatro recortes monte um retângulo. Em seguida, dê a expressão algébrica de sua área.

Exercício 02.30 Forneça as expressões correspondentes aos perímetros das figuras do exercício 02.28.

Exercício 02.31 Em cada item do exercício 02.28, ache uma expressão equivalente mas diferente para a área encontrada para as figuras.

Propriedade distributiva

Faça o seguinte cálculo, mentalmente: $59 \cdot 101$ (faça isso antes de continuar lendo!) Talvez você tenha rapidamente chegado ao resultado, 5959, pelo seguinte raciocínio: 59 vezes 100 é igual a 5900. Basta adicionar 59 a isso para chegar ao resultado final: $5900 + 59 = 5959$.

A propriedade numérica por trás desse raciocínio é a **propriedade distributiva** da multiplicação em relação à adição. Podemos entender o raciocínio da seguinte forma: vamos reescrever a conta

$$59 \cdot 101$$

como

$$59 \cdot (100 + 1)$$

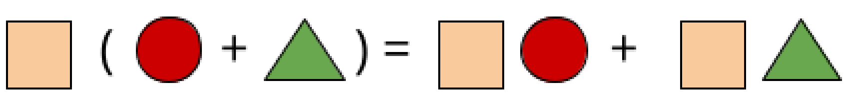
Repare que $59 \cdot 101$ e $59 \cdot (100 + 1)$ são a mesma conta: só fizemos reescrever o 101 como uma conta de mesmo valor. Repare também a importância dos parênteses: eles indicam que queremos fazer primeiro a soma e só depois a multiplicação. Continuando, sabemos que isso é o mesmo que

$$59 \cdot 100 + 59 \cdot 1$$

O que está acontecendo: ao multiplicar o 59 por uma soma, nós **distribuímos** o 59 para cada parcela dessa soma, multiplicando-o por cada uma:

$$59 \cdot (100 + 1) = 59 \cdot 100 + 59 \cdot 1$$

E isso vale em geral: sempre que multiplicamos um valor por uma soma, isso é o mesmo que a adição de cada parcela da soma multiplicada por esse valor. Ou então:



Ou, equivalentemente[18]:

$$x(a + b) = xa + xb$$

Exercício 02.32 Resolva as seguintes equações:

a) $19x + 4 = 42$
b) $3(x + 1) = 10,5$
c) $x(4 + x) - x^2 = 8$
d) $y(y + 3) = y^2 + 7$
e) $17k + 4 = 3(k + 2)$
f) $12(i + 5) = 16i + 3$
g) $0,5(j + 3) = 7$
h) $0,7m + 0,3m = 30(m + 16)$
i) $-19x + 4 = 42$
j) $3(-x + 1) = 10,5$
k) $-2w(4 + w) + 2w^2 = 8$
l) $17k + 4 = -3(-k + 2)$
m) $-8(a + 3,7) = -19,6$
n) $5(z + 3) = 12(6 - z)$

[18] Na verdade, a propriedade é mais genérica ainda, e se estende para somas de quaisquer número de parcelas: $x(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) = xa_1 + xa_2 + xa_3 + ... + xa_n$