05 - Cálculo algébrico

Matemática

8º ano | out/2021

Estamos fazendo cálculos com expressões algébricas há algum tempo, por exemplo, ao encontrar equações equivalentes ou resolver equações. Convém, no entanto, apresentar algumas ideias e regras para essas manipulações. O objetivo é exercitar alguns procedimentos para que cálculos fluam com mais facilidade e que certos aspectos da disciplina tornem-se mais fáceis.

- *Omitir o sinal de multiplicação*

  - $x \cdot y = xy$
  - $a \cdot b = ba$
  - $c \cdot c = c^2$
  - $z \cdot z \cdot y = z^2y$

- *Simplificar multiplicações*

  - $1x = x$
  - $y \cdot (-1) = -y$
  - $(2k) \cdot (4\ell) = 8k\ell \rightarrow (2k) \cdot (4\ell) = 2 \cdot k \cdot 4 \cdot \ell = 2 \cdot 4 \cdot k \cdot \ell = 8k\ell$
  - $x^2 \cdot x^3 = x^5$
  - $(-3x^2) \cdot (2x^3) = -6x^5$

- *Distributiva*

  - $x(a + b) = xa + xb$
  - $2x^2(x + 3y) = 2x^3 + 2x^2y$

- *Simplificar divisões*

- $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
- $\frac{8x}{12} = \frac{2x}{3}$
- $\frac{y^3}{y} = y^2$
- $\frac{18x}{6x^3} = \frac{3}{x^2}$

- *Simplificar somas*

- $x + x = 2x$
- $3k + 4k = 7k$
- $2xy + 9xy = 11xy$
- $3ab - 10ab = -7ab$
- $4a + 5b - a + 3b = 3a + 8b$
- $\frac{3}{8}x - \frac{5}{12}y + x =$ $\quad$ $mmc(8;12) = 24$

$$\frac{9}{24}x - \frac{10}{24}y + \frac{24}{24}x =$$

$$\frac{9x - 10y + 24x}{24} = \frac{33x - 10y}{24}$$

- *Cuidado com o sinal de menos antes de parênteses!*

- $-x = (-1)x$
- $-x - 2x = -3x$
- $-(x - 2x) = (-1)(x - 2x)$

$$= (-1)x + (-1)(-2x)$$
$$= -x + 2x$$
$$= x$$

- $-(a + b) = -a - b$
- $-(a - b) = -a + b$

Exercício 1. Silvia se perguntou se $3a$ mais $8b$ dá $11ab$. Para responder, imagine que $a = 2$ e $b = 3$.

a) Quanto vale $3a + 8b$?
b) Quanto vale $11ab$?
c) Responda a pergunta de Silvia.

Exercício 2. Efetue os cálculos, simplificando as expressões:

a) $(5x^2) \cdot (2x^4)$
b) $3 + 2x - (x + 5)$
c) $x^2 - x(x + 3) + x^2 + x$
d) $2x^2 + 3y - 4x + 5y - 3(y + 2)$

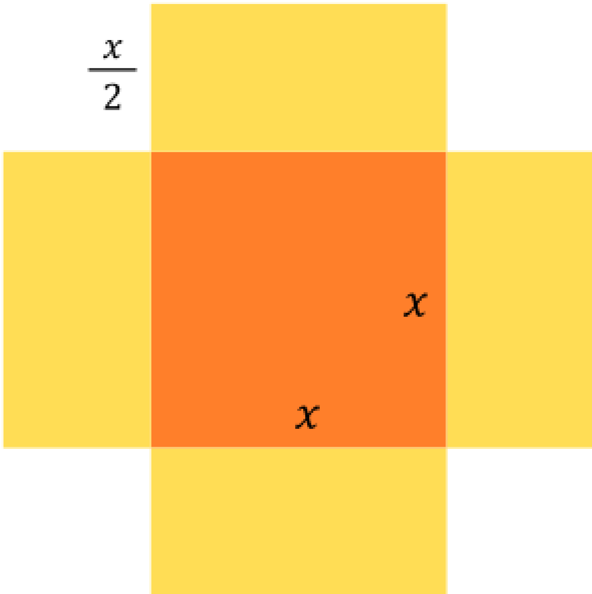
Exercício 3. Comece por simplificar as frações e, depois, efetue os cálculos indicados.

a) $\frac{4x^2}{4x} - 5x$
b) $\frac{x^5}{2x^2} \cdot \frac{3x}{5}$

c) $\frac{y}{y} \cdot x$

d) $\frac{x^3y^2z}{x^3y^2z} \cdot x$

Exercício 4. Veja um modelo de caixa de papelão sem tampa:



Sua tarefa é encontrar a fórmula que fornece a área de papelão utilizada para fazer essa caixa. Você pode seguir os seguintes passos:

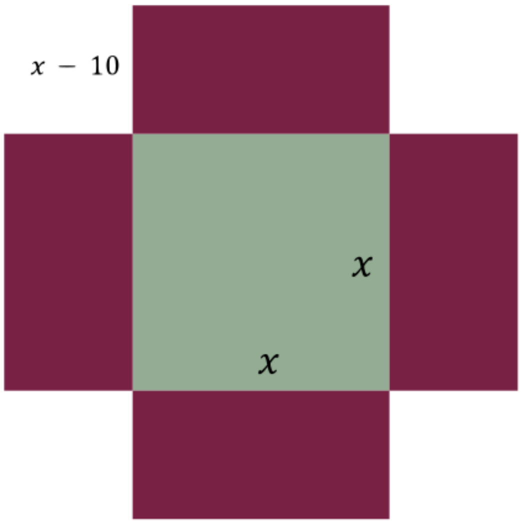
(i) Escreva a área do quadrado laranja

(ii) Escreva a área de um dos retângulos amarelos;

(iii) Indique o quádruplo da área anterior, pois há quatro retângulos amarelos iguais;

(iv) A área total é o resultado de **(i)** mais o de **(iii)**. Escreva a fórmula $A =$ ...

Exercício 5. Observe outro modelo de caixa sem tampa.



a) Encontre a área total A de papelão usada para fazer a caixa (você pode seguir os mesmos passos da dica do exercício anterior).

b) Encontre a capacidade C da caixa. Para isso, multiplique a área da base pela altura (ou então: faça comprimento vezes largura vezes altura).

Exercício 6. As três parcelas (ou termos) da adição algébrica $7a - 2a + 3a$ são semelhantes, porque têm a mesma variável elevada ao mesmo expoente, que é 1. A adição dos três termos pode ser representada por um só termo, a soma $8a$:

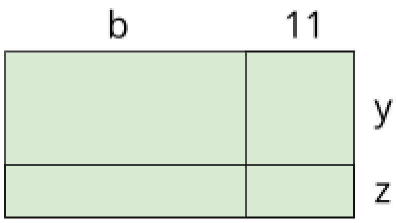
$$7a - 2a + 3a = 8a$$

Por isso, o procedimento de adicionar termos com parte literal[1] igual é chamado de *redução de termos semelhantes*. Faça essa redução nas expressões seguintes:

a) $3x^2 - 5x + x(x^2 - 3)$
b) $7(x^2 - 3x + 5) + 2x(x - 3)$
c) $5(x + 1) - x - 2 - 7(x + 3)$
d) $xy - 3x^2y + \frac{xy}{2} - \frac{2x^2y}{5}$

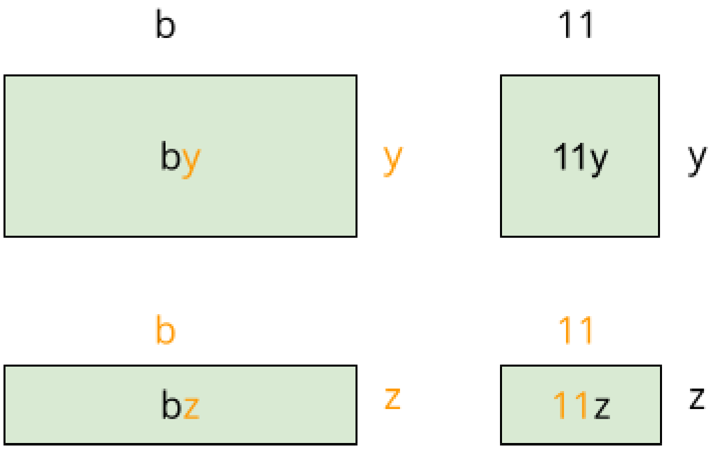
Distribuindo e redistribuindo

Vamos relembrar uma figura que vimos há pouco tempo. Trata-se de um retângulo repartido em quatro.



Vimos dois jeitos diferentes de calcular a área dessa figura. Alguns pensam: “Bom, temos quatro retângulos. Basta calcular a área de cada um deles e depois somar o resultado todo”.

[1] com parte literal queremos dizer a “parte algébrica": a porção do termo que contém variáveis e não números.



Bem, por esse raciocínio, concluímos que a área A do retângulo todo é

$$A = by + bz + 11y + 11z$$

Outros, no entanto, pensam o seguinte: “trata-se de um grande retângulo, com base $b + 11$ e altura $y + z$”. Ora, então A deve ser dado por

$$A = (b + 11)(y + z)$$

Mas é a mesma área! Trata-se de equações equivalentes. De fato, da segunda, é possível chegar na primeira valendo-se da propriedade distributiva. Veja:

$$A = (b+11)(y+z)$$

$$= (b+11)y + (b+11)z$$

$$= (b+11)y + (b+11)z$$

$$= by + 11y + (b+11)z$$

$$= by + 11y + bz + 11z$$

Note que no primeiro passo, estamos distribuindo a expressão entre parênteses inteira. Depois, é preciso distribuir mais vezes ainda!

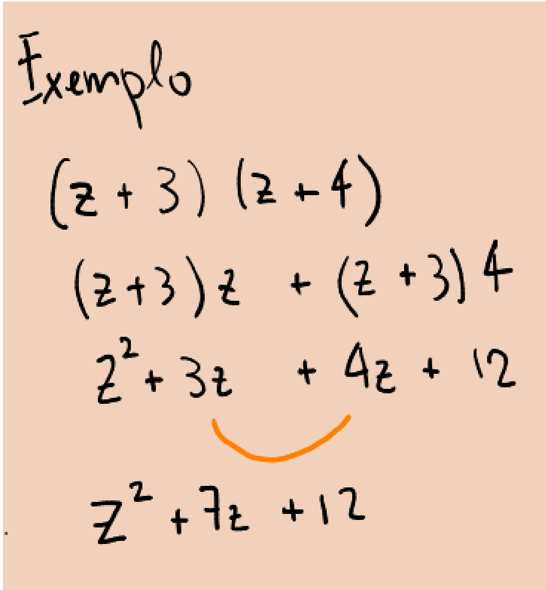
Exercício 7. Distribua e simplifique as expressões, como no exemplo.

a) $(x + 2)(x + 7)$

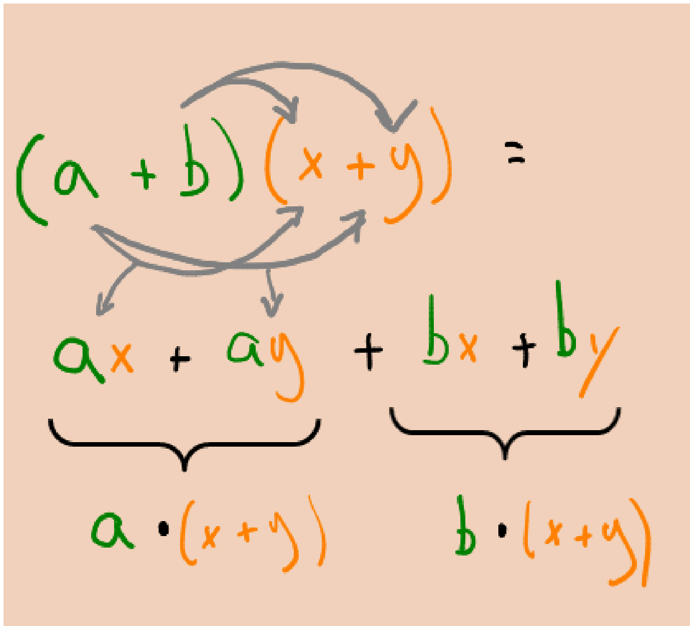
b) $(a - 2)(a - 7)$

c) $(x + y)(x + 2)$

d) $(y^2 - 1)(y + 5)$



Repare que, ao final, fazer essa distribuição é somar a combinação dos elementos do parênteses da frente com os parênteses de trás, como no exemplo ao lado.



Exercício 8. Usando a dica apresentada acima, distribua e simplifique as expressões.

a) $(b + c)(b + 7)$

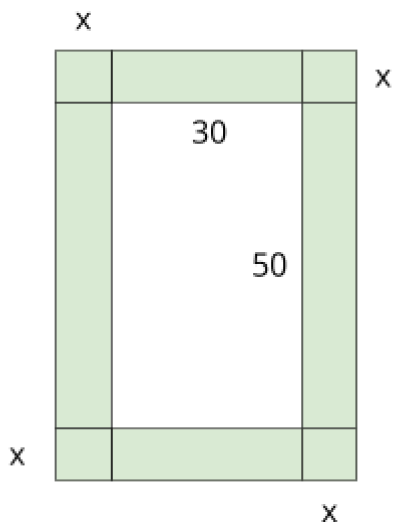
b) $(3 - a)(a + 5)$

c) $(x + y)(x + y)$

d) $(y - 1)(y + 1)$

Exercício 9. Considere a área da moldura ao lado. As medidas marcadas estão em centímetros.

a) Deduza uma fórmula para a área A da moldura, em função de x.
b) Se x = 10, qual é a área da moldura?



Exercício 10. Resolva a seguinte equação: $(x + 3)^2 = (x + 2)(x + 5)$.

Fatoração

Fatorar significa decompor em fatores. Você já aprendeu a decompor um número em seus fatores primos[2]. Agora, vamos decompor expressões algébricas em seus fatores.

Considere a expressão $2x^2 + 2xy$. Vamos tentar responder à pergunta. Há alguma multiplicação que tem como resultado a expressão $2x^2 + 2xy$?

Podemos ver que cada uma de suas parcelas tem o **fator comum** $2x$.

$$2x^2 + 2xy = 2x \cdot x + 2x \cdot y$$

Nesses casos, dizemos que o $2x$ é o **fator comum** aos dois termos. Se tentarmos usar a **distributiva ao contrário**, veremos que

$$2x^2 + 2xy = 2x(x + y)$$

E dizemos que estamos colocando o fator comum **em evidência**. Veja outro exemplo:

$$6x^2y + 9x^2 + 12x$$

$$= 3x \cdot 2xy + 3x \cdot 3x + 3x \cdot 4$$

$$= 3x(2xy + 3x + 4)$$

[2] Por exemplo, ao dizer que 30 é 3 vezes 2 vezes 5.

Exercício 11. Você pode colocar o fator comum em evidência também nas expressões numéricas.

a) Coloque o fator comum em evidência, e depois resolva a conta.

i) $25 \cdot 731 + 75 \cdot 731$

ii) $11 \cdot 354 + 11 \cdot 5$

iii) $2 \cdot 35 + 35 \cdot 6$

b) Coloque os fatores comuns em evidência, e depois simplifique:

$$\frac{7\cdot9+9\cdot38+4\cdot58}{58\cdot3+38\cdot2}$$

Exercício 12. Fatore as seguintes expressões algébricas:

a) $ax + bx$ **b)** $ax^2 + bx^3$ **c)** $6x^3 + 9x^2 + 12x$

d) $ab + \frac{a}{3}$ **e)** $15xy + 20x$

Exercício 13. Fatore as seguintes expressões. Para resolver esse exercício, olhe a sua solução do exercício 8.

a) $b^2 + 7b + bc + 7c$ **b)** $-2a + 15 - a^2$

c) $x^2 + 2xy + y^2$ **d)** $y^2 - 1$