02 - Linguagem algébrica

Matemática

8º ano mar/2021

Material inspirado no livro "Matemática Atual 7ª série", Antônio José Lopes Bigode. São Paulo, Atual, 1994

A matemática se divide em vários ramos ou subáreas. A aritmética, por exemplo, é o ramo que estuda os números e as operações. A geometria estuda as formas. A álgebra trata das expressões matemáticas com letras, por exemplo, as fórmulas e as equações. A álgebra difere da aritmética pois faz uso da *abstração* ao usar letras para representar números desconhecidos ou que podem assumir muitos valores.

Vamos usar números, letras e sinais de operação para expressar operações e relações. Se quisermos representar **um número qualquer**, usaremos simplesmente uma letra, por exemplo, *x*. Se quisermos representar o dobro de um número qualquer, poderemos usar o número dois, que está associado à ideia de dobro, e multiplicá-lo por esse número qualquer escolhido anteriormente: *2x*.

Lembrando que quando multiplicamos um número por uma letra, podemos omitir o sinal de multiplicação:

$y \times 3 = y \cdot 3 = 3y$

Nesse caso, prefere-se colocar o número antes da letra. Evita-se usar o sinal em cruz para a multiplicação (×) já que ele pode ser confundido com a letra x

Exercício 1. Complete as lacunas seguindo os exemplos:

um número qualquer: x
outro número qualquer: y
o dobro de um número: 2x
o sucessor de um número: _______
o sucessor do dobro de um número: _______
o triplo de um número: _______
o quádruplo de um número: _______
um número mais 5: _______
a soma de dois números quaisquer: _______
o quadrado de um número: _______
o dobro do sucessor de um número: _______

Chamamos expressões simbólicas como essas de **expressões algébricas**. Podemos relacionar duas ou mais expressões algébricas. Por exemplo, se quisermos dizer que um número é igual ao dobro de outro número, poderemos lançar mão do símbolo da igualdade (=) e escrever $a = 2b$. Se quisermos dizer que um número é maior que outro, escreveremos $m > n$.

Exercício 2. Complete as lacunas seguindo os exemplos:

um número é igual ao dobro de outro:	a = 2b
um número é maior que outro:	m > n
um número é menor que seu dobro:	x < 2x
um número é igual a outro número mais 5:	_______
o sucessor de um número é igual a outro número:	_______
o dobro de um número é menor ou igual ao triplo de outro número:	_______
um número é maior do que sete:	_______
um número é menor que seu sucessor:	_______

Compare agora as seguintes sentenças:

i) 3 + 7 = 10
ii) xy = 10
iii) m > 7
iv) 3 < 5
v) 8 é primo
vi) 2 · 3 = 5

Uma **sentença** matemática é uma expressão que afirma algo sobre alguma coisa. Por exemplo: *5 = 2 + 3* está afirmando que cinco **é** igual a dois mais três. Existem expressões que não são sentenças, por exemplo:

(3 + 5) · 8

Essa expressão não afirma nada, apenas apresenta uma conta.

Você deve ter percebido que as sentenças i e iv são verdadeiras. As sentenças v e vi são falsas. E a ii e iii?

i) 3 + 7 = 10	verdadeiro
ii) xy = 10	?
iii) m > 7	?
iv) 3 < 5	verdadeiro
v) 8 é primo	falso
vi) 2 · 3 = 5	falso

Nesses casos, *x*, *y*, e *m* são letras que podem representar qualquer número. Chamamos esses números sem valor definido de **variáveis**. Por exemplo, se *m* for igual a 8, então a ii é verdadeira. Se *m* for igual a 100, também. Se, no entanto, *m* for igual a 5, então a ii é falsa. Dá pra entender por que chamamos *m* de uma variável: seu valor varia! Ou seja, se perguntarmos se a sentença $m > 7$ é verdadeira, a resposta é: *depende do valor de m*.

Sentenças sobre as quais não é possível afirmar se são verdadeiras ou falsas devido à presença de uma variável são chamadas de **sentenças abertas**.

Exercício 3. Considere as sentenças abaixo. Para cada uma, decida se é verdadeira, falsa, ou aberta. Se for aberta, ache um ou mais valores para as variáveis que tornem a sentença verdadeira. Os três primeiros itens são exemplos.

x) $3 \cdot 4 = 7$ **Sentença falsa.**
y) $5 + 2 \leq 7$ **Sentença verdadeira.**
z) $4x = 8$ **Sentença aberta.** Ela torna-se verdadeira se x = 2
a) $0,6 \cdot 4 = 24 \div 10$ ...
b) $x + y = 17$
c) $5a = 10$
d) $3^3 = 81$
e) $5 + t = 35$
f) $\frac{x}{y} = 1$

Valor numérico de uma expressão

Dizemos que o **valor numérico** de uma expressão algébrica (ou seja, uma expressão com letras, números e operações) é o valor obtido pelo seguinte procedimento:

1) *substituir* todas as variáveis da expressão por números;
2) efetuar todas as operações.

Os números pelos quais as variáveis vão ser substituídas são dados. Por exemplo, considere a expressão algébrica correspondente a “o antecessor do triplo de um número”:

$$3n - 1$$

Vamos descobrir qual é o valor numérico dessa expressão **quando o n é igual a 15**.

$3n - 1$	Expressão inicial
$3 \cdot 15 - 1$	1) substituímos a variável pelo número correspondente (15)
$45 - 1$	2) efetuamos as operações
44	

Pronto! Quando $n = 15$, O valor numérico de $3n - 1$ é 44. Podemos expressar essa ideia, em português, da seguinte maneira:

> "qual é o valor do antecessor do triplo de um número se esse número é o 15?"

Para outros valores de n, o valor numérico da mesma expressão seria diferente. Verifique que, por exemplo, quando $n = 5$ o valor numérico da expressão é 14.

Exercício 4. Encontre o valor numérico das expressões abaixo:

i) $2z + 1$, para $z = 3$
ii) $2z + 1$, para $z = 2$
iii) $2z + 1$, para $z = 1$
iv) $2z + 1$, para $z = 0$
v) $2z + 1$, para $z =- 1$
vi) $t^2 - 1$, para $t =- 2$
vii) $t^2 - 1$, para $t =- 1$
viii) $t^2 - 1$, para $t = 0$
ix) $t^2 - 1$, para $t = 2$
x) $t^2 - 1$, para $t = 5$

Exercício 5. Complete a tabela:

a	b	c	$a + b$	$2(a + b)$	$3c$	$2(a + b) - 3c$
1	-3	-2	-2	-4	-6	2
2	-2	-1	0	0	-3	3
3	-1	0				
4	0	1				
5	1	2				
6	2	3				

7	3	4				
8	4	5				

Antes de continuar lendo, certifique-se de que você tem claro o significado dos seguintes conceitos:
- Expressão algébrica
- Valor numérico de uma expressão algébrica
- Sentença matemática
- Variável

Equações

O termo **equação** provém etimologicamente da palavra latina *æquatĭo*, que significa igualação ou igualdade. Uma equação é uma sentença matemática com uma ou mais variáveis e que afirma uma **igualdade**. Em outras palavras, é uma expressão matemática com letras, números, operadores e um símbolo de igual (=). Note que uma equação é uma sentença com uma ou mais variáveis e, portanto, é sempre uma sentença aberta.

Exercício 6. Complete tabela abaixo, cujas linhas dizem respeito a uma lista de sentenças matemáticas e cujas colunas indicam, a respeito dessas sentenças, o seguinte:

- Se a sentença é uma equação ou não;
- Exemplos de valores para as variáveis que tornam a sentença verdadeira;
- Quantas combinações de valores para as variáveis tornam a sentença verdadeira: uma, duas, muitas ou nenhuma?

Use as primeiras três linhas como exemplo.

sentença	**é equação?**	**exemplos de valores para as variáveis que tornam a sentença verdadeira**	**quantos valores tornam a sentença verdadeira: um, muitos ou nenhum?**
$4x = 8$	sim	$x = 2$	um
$m < 7$	não	$m = 6$ $m = 5$ $m = 4$ $m =- 1000$ ...	muitos
$i = j$	sim	$i = 1 e j = 1$ $i = 2 e j = 2$ $i = 3 e j = 3$ $i = 15 e j = 15$ ...	muitos
$5x - 3 = 42$			
$2(a + b) = 0$			
$0 \cdot t = 15$			
$z + 3 > 100$			
$x = 2y$			
$c = c + 3$			
$3y - 4 = 11$			
$4(x + 2) = 36$			
$7k \leq 28$			

Em seguida, analise a tabela e responda:

i) Que características deve ter uma sentença matemática para haja no máximo uma combinação de valores para as variáveis que a tornem verdadeira? Ou seja, que características têm as sentenças com “nenhum” ou “um” na última coluna?
ii) Que características têm as sentenças com ou “muitos” na última coluna?

Resolução de equações

Definimos que **uma solução** de uma equação é uma combinação de valores para as variáveis dela que a tornam verdadeira. Definimos também que **resolver** uma equação é achar o conjunto de *todas* as soluções daquela equação. Repare que no exercício anterior a terceira coluna pedia *exemplos* de valores para as variáveis que tornavam a sentença verdadeira. Fornecer alguns exemplos de **soluções** não é o mesmo que **resolver**: é necessário fornecer todas elas.

Vamos começar com os casos mais simples. Talvez você tenha percebido no exercício anterior que se uma equação contém somente **uma variável**[1], então existe **no máximo uma** solução. Por exemplo, a equação

$$3y - 4 = 11$$

torna-se verdadeira se e somente se$y = 5$. Veja:

$$3y - 4 = 11$$
$$3 \cdot 5 - 4 = 11$$
$$15 - 4 = 11$$

É verdade que quinze menos quatro é igual a 11. Logo, $y = 5$é a única **solução** da equação $3y - 4 = 11$. Assim, a equação está **resolvida**.

Exercício 7. Resolva as equações abaixo. Note que todas contém somente uma variável.

i) $3n - 1 = 14$
ii) $2z + 2 = 6$
iii) $5j = 25$
iv) $4 = x + 5$
v) $a = 3 - 2a$

As equações que não tem essa característica especial de conter somente uma variável também podem ser resolvidas. Considere, por exemplo a equação

[1] e se essa variável não estiver potenciada (ou seja, se estiver elevada a um)

$$2(a + b) = 0$$

que poderia ser lida como “o dobro da soma do número *a* com o número *b* é igual a zero”. Talvez você tenha percebido no exercício anterior que existem *muitos* valores para *a* e *b* que tornam essa equação verdadeira:

$a = 0$ e $b = 0$
$a = 1$ e $b = -1$
$a = -1$ e $b = 1$
$a = 2$ e $b = -2$
$a = 2021$ e $b = -2021$

Na verdade, a gente sempre pode adicionar mais uma solução a essa lista. Isso quer dizer que equações como essa têm *infinitas* soluções. Bom, se resolver equações quer dizer apresentar *todas* as soluções, será que é possível resolver uma equação como essa? Teremos que apresentar uma lista infinita?

Felizmente, a tarefa não é assim impossível. Você deve ter reparado que todos os valores para *a* e *b* que tornam a igualdade verdadeira, listados acima, têm algo em comum. Em todos eles o valor de *a* é igual ao valor de *b* negativo. Ou seja, podemos *descrever o conjunto de todas as soluções* da equação sem precisar listar um por um. Essa é a maneira de **resolver** essa equação. Em outras palavras, “*a é igual a menos b*”, ou então, $a = -b$ **resolve** a equação $2(a + b) = 0$.

Exercício 8. Resolva as seguintes equações:

i) $3(y + x) = 3$
ii) $4a = 104$
iii) $5j = 25t$
iv) $4z = x + 5$
v) $3(w + y) = y$
vi) $17 = 3 + 2k$

O grau da equação

Dizemos que uma equação é de **primeiro grau** quando todas as variáveis aparecem elevadas a um, ou seja, quando elas aparecem sem expoente. Se alguma variável aparece numa equação elevada a dois, dizemos que essa equação é de **segundo grau**, e assim por diante[2]. Veja exemplos:

$4z = x + 5$	1º grau
$4^2 z = x + 5^2$	1º grau
$4z^2 = x + 5$	2º grau
$4z^3 = x^2 + y$	3º grau
$a^{10} = b^2 + c^3 + d^4$	10º grau

Note que elevar um número à primeira potência ("elevar a um") nos dá esse mesmo número:

$5^3 = 125$
$5^2 = 25$
$5^1 = 5$

Ou seja, para qualquer valor de *n*,

$n^1 = n$

Essa distinção nos interessa quando queremos saber o número de soluções que uma determinada equação tem. Vamos resolver a seguinte equação:

$$x^2 = 9$$

Que é o mesmo que responder à pergunta: que número vezes ele mesmo resulta em nove? Não deve ser difícil lembrar que $3 \cdot 3 = 9$, logo, três é uma solução. Acontece que não é a *única* solução. Talvez você tenha percebido que o menos três também é solução:

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

Esse exemplo ilustra que equações de grau maior do que um, mesmo as que só têm uma variável, podem ter mais de uma solução. Isso não vale, no entanto, para as de primeiro grau: *equações de primeiro grau com uma variável têm no máximo uma solução*. Ou seja: é fácil de resolver.

Por causa dessa propriedade, nesse primeiro momento, vamos nos limitar a estudar as **equações de primeiro grau com uma variável**. Por exemplo:

$$4a = 104$$

[2] De modo geral, dizemos que uma equação tem **grau *n*** se houver pelo menos uma variável elevada a *n* e nenhuma variável elevada a um número maior que *n*. Essa definição serve somente para equações em que as variáveis não estão multiplicadas entre si. Caso haja multiplicação entre variáveis, o grau da equação é definido pela maior soma de expoentes de variáveis que estão multiplicadas. Por exemplo, $x^2y^3 + z^4 = 0$ é uma equação de quinto grau. Mas essa distinção não é muito importante para nossos propósitos.

Sabemos que só existe um valor para a variável a que satisfaz a equação. É natural que tentemos *descobrir* que valor é esse. Nesse contexto, é comum chamá-la de **incógnita** ao invés de variável, visto que não estamos tão preocupados com todos os valores sobre os quais ela pode variar, e sim com o único valor que, ao assumir, satisfaz a equação.

O vocabulário está se acumulando! São vários nomes, mas as ideias por trás deles são relativamente simples. Note que cada conceito apresentado é usado para definir os próximos:

- *Expressão algébrica* - expressão com letras, números e operações
- *Variável* - uma letra dentro de uma expressão algébrica
- *Valor numérico de uma expressão algébrica* - o que acontece quando substituímos alguma variável por um número
- *Sentença matemática* - uma expressão que afirma algo (que inclui =, <, >, etc)
- *Equação* - uma sentença que afirma uma igualdade (que inclui =)
- *Solução da equação* - valores para as variáveis que satisfazem a equação
- *Resolver a equação* - achar todas as soluções
- *Grau da equação* - o maior expoente que aparece numa variável
- *Incógnita* - outro nome para variável

A balança de dois pratos

É uma dos meios mais antigos[3] de descobrir ou comparar o peso de objetos. Em sua forma mais simples, consiste em dois pratos pendurados nas duas pontas de um eixo suspenso pelo seu centro, de forma que os dois pratos mantêm a mesma altura desde que o peso dos objetos sobre eles seja o mesmo.

Balança de pratos

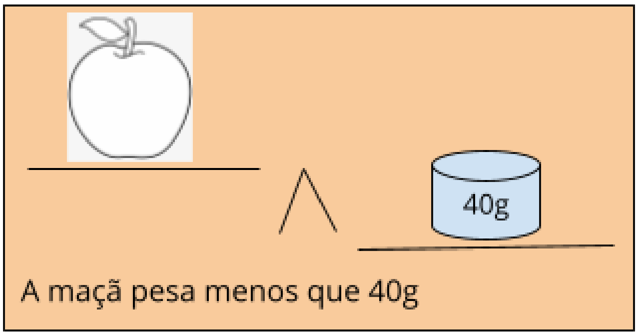
versão "gambiarco"

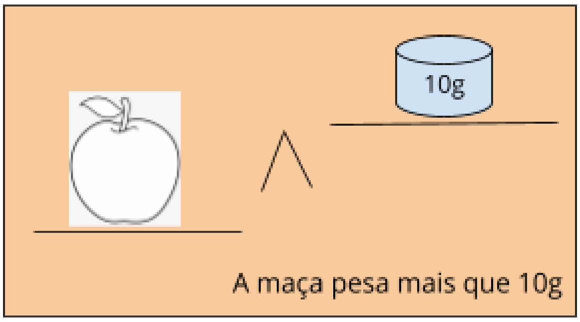
[3] O nome *balança*, inclusive, vem do latim *bis* - dois e *linx* - prato (fonte)

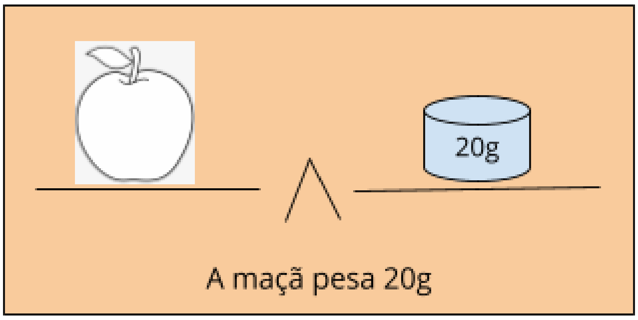
Esse tipo de balança, a princípio, não pode ser usado para medir o *valor absoluto* do peso de objetos: ela só faz **comparar** o peso de duas coisas, ou seja, dizer se um objeto é mais, menos ou igualmente pesado que outro. Isso é diferente de uma balança eletrônica, por exemplo, que te dá o peso em gramas ou quilogramas do que quer que você coloque em cima dela.

Se houver, no entanto, objetos com pesos absolutos conhecidos, é possível determinar o valor absoluto do peso de outros objetos também, ao comparar uma coisa com a outra. Esse é o papel desses pequenos cilindros de metal que se vê na foto acima.

Por exemplo, suponha que você quer descobrir o peso de uma maçã. Você coloca essa maçã em um prato, e um peso de 20g no outro. Se os pratos estiverem equilibrados (*balanceados)*, ou seja, se um prato estiver na mesma altura que o outro, isso quer dizer que a maçã pesa 20g.







Exercício 9. Um comerciante de especiarias recebeu de seu fornecedor pequenos sacos de pimenta-do-reino. Neles lê-se:

i) 4g
ii) 10g
iii) 12g
iv) 8g
v) 5g

O comerciante, no entanto, desconfia que o fornecedor não tenha pesado os produtos corretamente. Provido apenas de uma balança de pratos, um peso de 1g, um de 3g e um de 9g, deseja conferir se o peso declarado corresponde ao peso real dos produtos. Para cada um dos cinco sacos descritos acima, que pesos o comerciante deve usar em cada prato de sua balança para fazer essa conferência[4]?

A equação e a balança

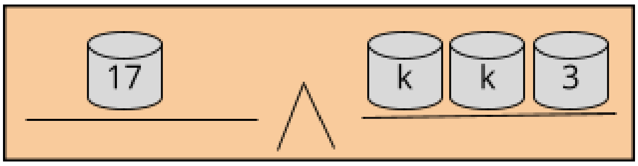
Pode parecer estranho uma passagem sobre balanças de prato no meio de uma atividade sobre álgebra, mas uma equação tem muito em comum com uma balança de pratos equilibrada[5]. Já dissemos que uma equação **afirma uma igualdade** entre valores. A balança equilibrada, ou seja, com pratos na mesma altura, **afirma uma igualdade** de pesos. Remeter a essa analogia vai nos ajudar a resolver equações. Por exemplo, considere a seguinte equação:

$$17 = 3 + 2k$$

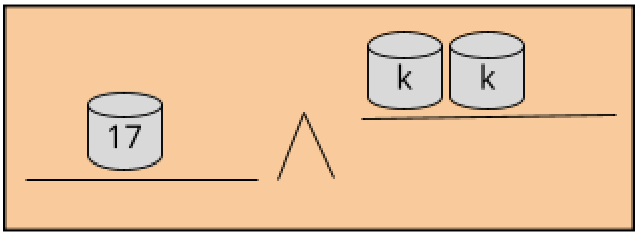
Poderíamos representá-la como uma balança. Em um prato, vai uma peça de peso 17. No outro, uma peça de peso 3 e duas de peso k. O símbolo de igual é traduzido pelo fato de que a balança está equilibrada.

---

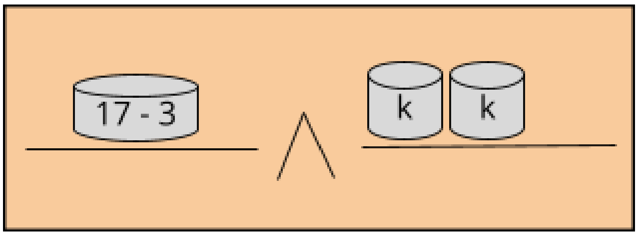
[4] *Desafio 1*: faça esse exercício para todos os números inteiros de 1 a 13.
Desafio 2: mostre que se tivermos peças de peso 1, 3, 3^2 e 3^3 (uma de cada), poderemos pesar todos os valores inteiros de 1 até 40.
Desafio 3 (esse é difícil mesmo): mostre que se tivermos peças de peso 1, 3, 3^2, 3^3 ... 3^n, poderemos pesar todos os valores inteiros de 1 até a soma de todos esses pesos.
Desafio 4 (esse também): Mostre que se tivermos peças de peso 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, ... 2^n, poderemos pesar todos os valores inteiros de 1 até 2^{n+1} - 1 colocando todas as peças no mesmo prato (primeiro mostre que 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2n = 2n + 1 - 1)
[5] assim como uma *inequação* tem muito a ver com uma balança desequilibrada...



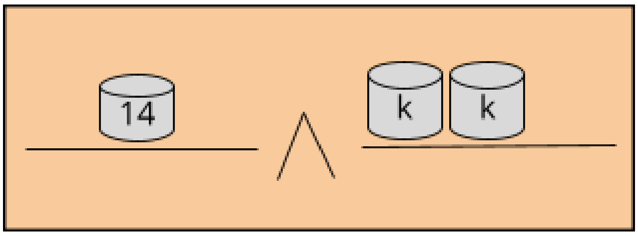
Queremos descobrir o valor da incógnita k (ou então: queremos descobrir que valor para a variável k torna a igualdade verdadeira). Se retirarmos a peça de peso 3 do lado direito, a balança pende para a esquerda:



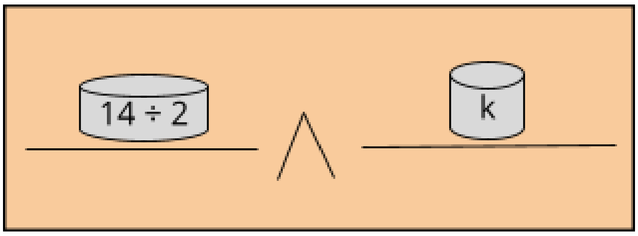
Para restaurar o equilíbrio à balança, teremos que retirar 3 do lado esquerdo também. Vamos trocar, então, a peça de peso 17 por uma peça de peso $17 - 3$



Mas $17 - 3 = 14$, então temos:



Falta pouco para descobrirmos o valor de k. Agora não adianta tentarmos subtrair k de 14, pois não temos o valor da incógnita ainda. Podemos perceber, no entanto, que o peso de $2k$ é o dobro do peso de k, logo, 14 é o dobro do peso de k: basta dividir 14 por 2.



Pronto! O valor para k que torna a equação verdadeira é 7. Algebricamente, o processo é o seguinte:

$17 = 3 + 2k$

$17 - 3 = 3 + 2k - 3$ - Retiramos 3dos dois lados

$14 = 2k$ - O 3 ”sumiu” do lado direito!

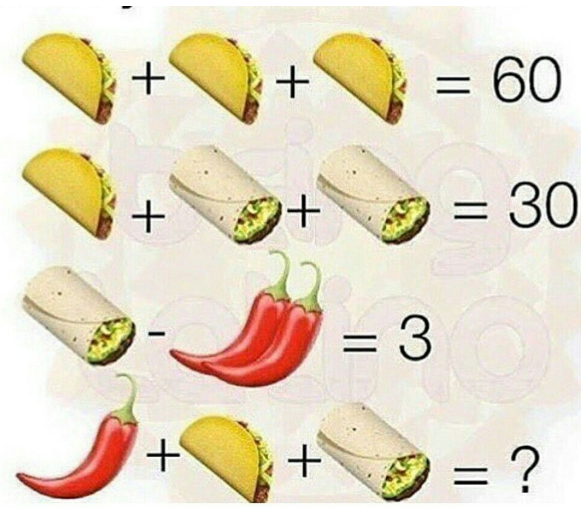
$\frac{14}{2} = \frac{2k}{2}$ - Dividimos por 2 dos dois lados

$7 = k$ - Descobrimos o valor de k!

Exercício 10. Usando o método descrito acima, resolva as seguintes equações[6]:

a) $2x = 1500$
b) $43 = a + 5$
c) $z + 5,25 = 2501,5$
d) $3a + 4 =- 20$
e) $3a + 4 = 17$
f) $- 3(x + 2) = 27$
g) $6(c - 8) = 1434$
h) $0,8t = 160$

Exercício 11. Analise a imagem abaixo e forneça equações que correspondam ao problema descrito nela. Em seguida, resolva essas equações, de modo a conseguir responder a pergunta final.



[6] Desafiozinho: Resolva a equação *(18 - x)11 + (33x - 7)/5 =79*.
Desafio: Sabendo que *a = 2x + 3*, *b = 3,5+0,7x* e *c = 8x - 5,* resolva a equação *2a - 4b = c - 0,5*

Quanto custa tomar um banho?

As companhias distribuidoras de energia elétrica costumam informar a seus consumidores a fórmula para o gasto de energia de um aparelho elétrico:

$$G = \frac{P \cdot H}{1000}$$

Onde:

- G é o gasto em quilowatt-hora (kWh)
- P é a potência do aparelho em watt (W)
- H é o número de horas que o aparelho funcionou

Por sua vez, o custo de energia elétrica referente ao uso de um equipamento que gastou G kWh é dado por:

$$C = G \cdot R$$

Onde:

- C é o custo em reais
- G é o gasto em quilowatt-hora (kWh), como calculado na fórmula anterior
- R é o custo por quilowatt-hora (R$/kWh)

Exercício 12. O objetivo desse exercício é descobrir quanto custa um banho seu. O uso de calculadora é permitido. Anote todas as contas, medições e raciocínios envolvidos. Os passos envolvidos são:

a) Descobrir quanto tempo dura, em média, um banho seu. Para isso, meça o tempo de duração de três banhos seus, em dias diferentes. O valor a ser usado no cálculo deve ser a **média aritmética** dessas três medições[7]. Sejam m_1, m_2 e m_3 as três medições que você fez. Então a média aritmética delas é dada por:

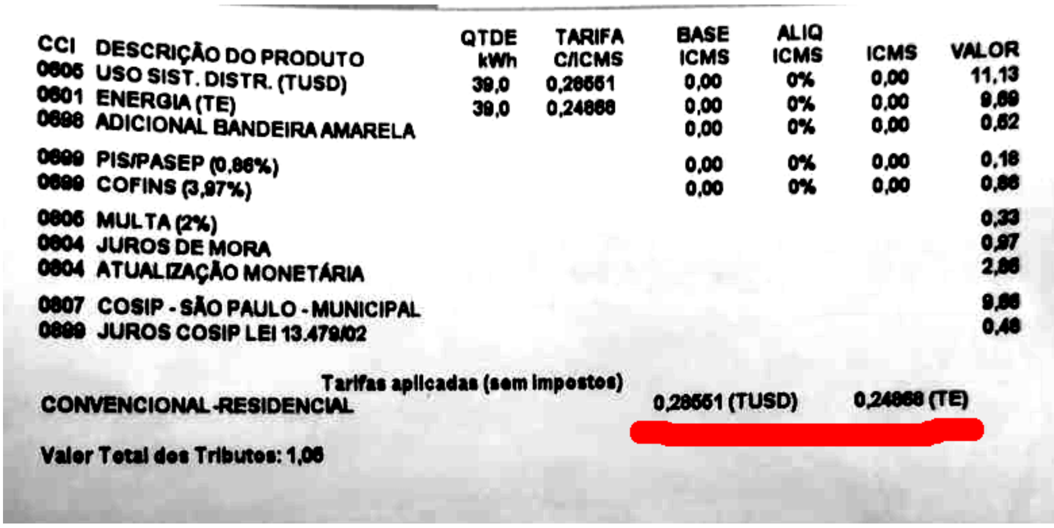
$$\frac{m_1+m_2+m_3}{3}$$

Verifique que as medições foram realizadas em horas, e não em minutos. Por exemplo, se você mediu primeiro um banho durando 5

[7] Na verdade, você deve fazer no mínimo três medições. Se desejar fazer mais medições, calcule a média aritmética da seguinte maneira. Sejam $m_1, m_2, \ldots, m_n$ as n medições que você fez. Então a média aritmética delas é dada por $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)/n$.

minutos, depois outro durando 10 minutos e por fim outro durando 7 minutos, considere que $m_1 = 5/60$, $m_2 = 10/60$, $m_3 = 7/60$.

b) Descubra qual é o preço de um kilowatt-hora na sua casa. Para isso, consulte uma conta de luz (peça a um responsável se não souber como encontrar). Provavelmente, o preço de um kilowatt-hora estará dividido entre uma taxa "TUDS" e uma "TE"[8]. Você deve somar ambas para obter o preço total e deve fazer as contas com essa soma. A imagem abaixo ilustra onde encontrar essas informações.



CCI	DESCRIÇÃO DO PRODUTO	QTDE kWh	TARIFA C/ICMS	BASE ICMS	ALIQ ICMS	ICMS	VALOR
0605	USO SIST. DISTR. (TUSD)	39,0	0,28651	0,00	0%	0,00	11,13
0601	ENERGIA (TE)	39,0	0,24868	0,00	0%	0,00	9,69
0698	ADICIONAL BANDEIRA AMARELA			0,00	0%	0,00	0,62
0699	PIS/PASEP (0,86%)			0,00	0%	0,00	0,16
0699	COFINS (3,97%)			0,00	0%	0,00	0,86
0606	MULTA (2%)						0,33
0604	JUROS DE MORA						0,97
0604	ATUALIZAÇÃO MONETÁRIA						2,86
0607	COSIP - SÃO PAULO - MUNICIPAL						9,86
0699	JUROS COSIP LEI 13.479/02						0,46

Tarifas aplicadas (sem impostos)
CONVENCIONAL-RESIDENCIAL 0,28651 (TUSD) 0,24868 (TE)

Valor Total dos Tributos: 1,06

c) Descubra a potência do seu chuveiro elétrico. Para isso, você deverá descobrir qual o nome de seu modelo. Para isso, veja se há alguma identificação nele próprio ou se quem o comprou ainda tem uma nota fiscal ou um manual de usuário. Com o nome do modelo em mãos, pesquise na internet sua potência. Suponha, por exemplo, que você descobriu que o modelo do seu chuveiro é "*super ducha quattro*". Uma simples pesquisa no *google* rapidamente revela sua potência, que nesse caso é de 6800 W:

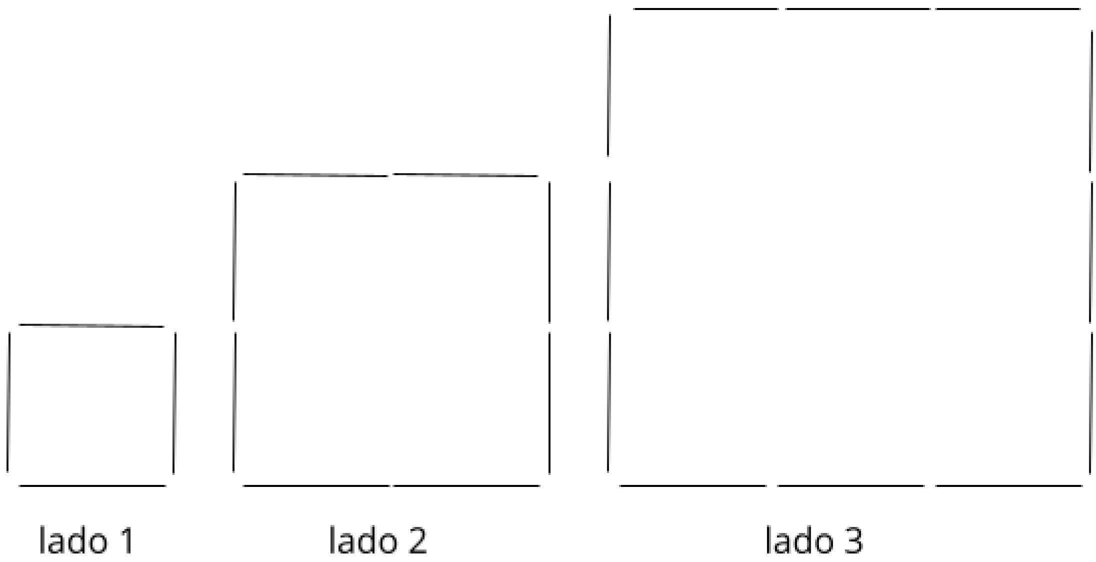
[8] A primeira é o que você está pagando para a infraestrutura do sistema elétrico, a segunda é referente ao próprio consumo de energia elétrica. Mas essa distinção não é muito importante para os nossos propósitos.

-

d) Por fim, com essas informações, use as duas fórmulas apresentadas para descobrir qual é o custo de um banho seu.

Se você não usa um chuveiro elétrico no seu dia a dia (por exemplo, se na sua casa o chuveiro é à gás), você deve escolher outro eletrodoméstico e fazer todos os passos analogamente ao descrito acima. Por exemplo, se você escolher medir o custo de um uso do microondas, você deverá: **a)** fazer três medições do tempo que leva para esquentar um prato, **b)** como acima e **c)** descobrir a potência do seu microondas. Outros exemplos de eletrodomésticos que você pode analisar são: máquina de lavar pratos, máquina de lavar roupas, geladeira, lâmpada, televisão, computador, etc.

Exercício 13. Imagine que você está usando palitos de fósforo para formar quadrados. É possível formá-los com lados de vários tamanhos:



a) Construa uma tabela com 10 entradas que relacione o número de palitos no *lado* de um quadrado com o número de palitos no quadrado todo.

b) Explique com suas palavras qual é a relação entre o número de palitos no lado de um quadrado com o número de palitos no quadrado todo.

c) Qual é o número de palitos necessário para a criação de um quadrado de lado:

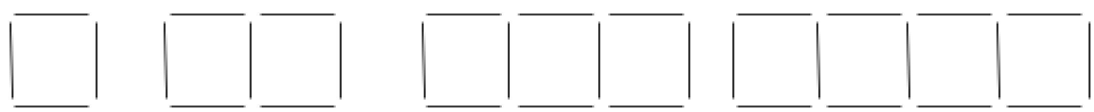
i) 4? **ii)** 6? **iii)** 10? **iv)** 73?

d) Qual é o número de palitos necessários para a criação de um quadrado de lado **n**?

e) Forneça uma equação que relacione o número de palitos no lado de um quadrado com o número total de palitos no quadrado.

f) Forneça uma equação que relacione o número de palitos num quadrado com o número de palitos no quadrado cujo lado tem um palito a menos do que aquele[9].

Exercício 14. Ao invés de formar quadrados com os palitos de fósforo, vamos agora formar *frisas*[10] de quadrados, como nos exemplos abaixo



Frisa de um quadrado — Frisa de dois quadrados — Frisa de três quadrados — Frisa de quatro quadrados

a) Construa uma tabela com 10 entradas que relacione o número de quadrados com o número de palitos na frisa.

b) Explique com suas palavras qual é a relação entre o número de quadrados com o número de palitos no frisa.

c) Qual é o número de palitos necessário para a criação de uma frisa com:

i) 4 quadrados
ii) 6 quadrados
iii) 10 quadrados
iv) 73 quadrados

d) Qual é o número de palitos necessários para a criação de uma frisa com **n** quadrados?

e) Forneça uma equação que relacione o número de quadrados numa frisa com o número total de palitos na frisa.

---

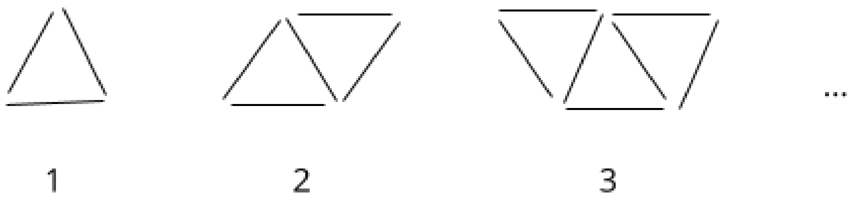
[9] Em outras palavras, forneça o número de palitos num quadrado de lado **n** em função do número de palitos no quadrado de lado **n - 1**

[10] Se não souber o que é uma frisa, procure no dicionário.

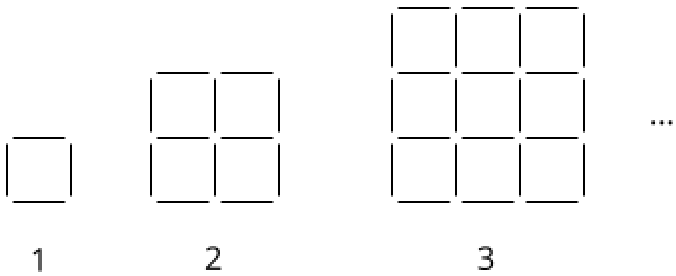
f) Forneça uma equação que relacione o número de palitos numa frisa com o número de palitos na frisa com um quadrado a menos que aquela[11].

Exercício 15. Refaça o exercício 14 considerando, ao invés da frisa de quadrados, as seguintes frisas:

a)

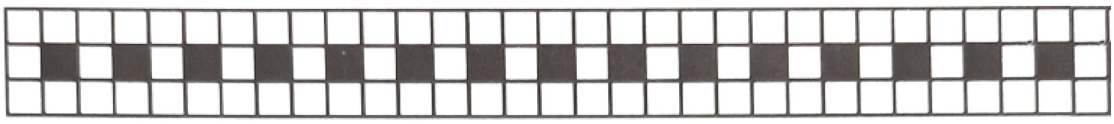


b)



Álgebra dos ladrilhos

Imagine uma faixa formada por ladrilhos pretos e brancos, como na figura a seguir:

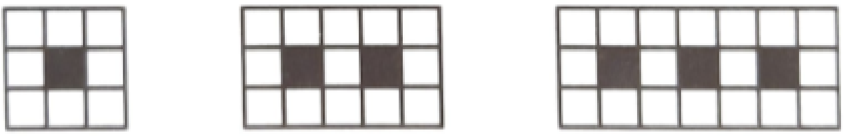


Uma **faixa** é formada por três camadas:

- a primeira e a terceira camada têm apenas ladrilhos brancos;
- a segunda camada alterna ladrilhos brancos e pretos

Uma **faixa completa** começa e termina com ladrilhos brancos na camada do meio. A **ordem** de cada faixa é determinada pelo número de ladrilhos pretos, ou seja, uma faixa de **ordem *n*** tem exatamente *n* ladrilhos pretos na camada do meio.

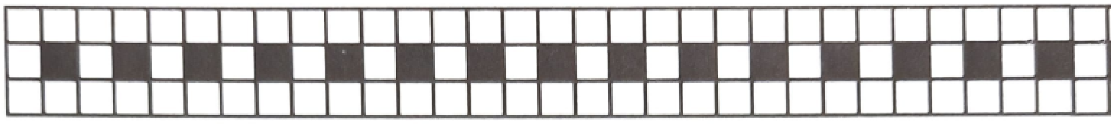
[11] Em outras palavra, forneça uma equação que relacione o número de palitos numa frisa com **n** quadrados com o número de palitos numa frisa com **n - 1** quadrados



ordem 1 ordem 2 ordem 3

Exercício 16.

a) Qual é a ordem da faixa abaixo?



b) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa

- **i)** de ordem 17?
- **ii)** de ordem 247?
- **iii)** de ordem *n*?

c) Dê o número de ladrilhos brancos que tem uma faixa de ordem:

i) 1 **ii)** 2 **iii)** 3 **iv)** 4 **v)** 10 **vi)** 50

d) Construa uma tabela de 10 linhas com o seguinte cabeçalho:

ordem da faixa (***o***)	ladrilhos pretos (***p***)	ladrilhos brancos (***b***)	número de colunas (***c***)	número total de ladrilhos (***t***)

e) Em cada item, forneça uma equação que:

- **i)** Relacione *t* com *p* e *b*
- **ii)** Relacione *t* com *c*
- **iii)** Relacione *p* com *b*
- **iv)** Relacione *o* com *c*

f) Determine *b*, *p* e *c* de uma faixa de ordem 18.

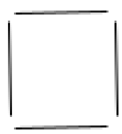
g) É possível construir uma faixa com exatamente 1000 ladrilhos brancos?

- Se sim: qual a ordem da faixa que tem 1000 ladrilhos brancos?
- Se não: sobram ladrilhos? Quantos?

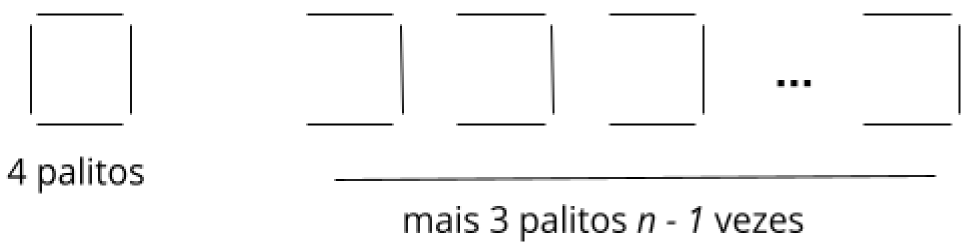
Fórmulas equivalentes

O exercício 14e) pedia uma equação que relacionasse o número de quadrados numa frisa com o número de palitos nela. Dois raciocínios comuns para chegar a essa equação são os seguintes:

Raciocínio 1. Se eu tenho *n* quadrados, então eu preciso de 4 palitos no começo:



e para cada quadrado restante, eu coloco mais três palitos. Como eu já coloquei o primeiro quadrado, vou precisar fazer isso *n - 1* vezes:

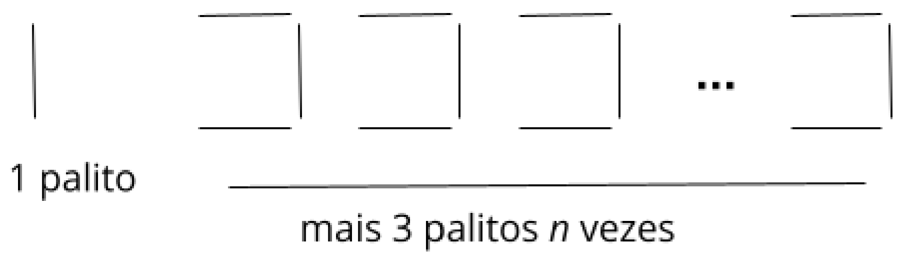


Logo, o número de palitos *P* é dado por:

$$P = 4 + 3(n - 1)$$

Raciocínio 2. Se eu tenho *n* quadrados, então eu preciso de 1 palito no início:

E, para cada quadrado na frisa, eu preciso colocar mais três palitos:



Assim, o número de palitos *P* é dado por:

$$P = 1 + 3n$$

Os dois raciocínios estão corretos, o que quer dizer que as duas equações representam o mesmo problema corretamente. Logo as duas equações representam *a mesma coisa*. Para qualquer *n*,

$$P = 4 + 3(n - 1)$$

e ao mesmo tempo

$$P = 1 + 3n$$

Mas se uma coisa é igual a outras duas, então essas outras duas são iguais entre si também!

$$4 + 3(n - 1) = P = 1 + 3n$$

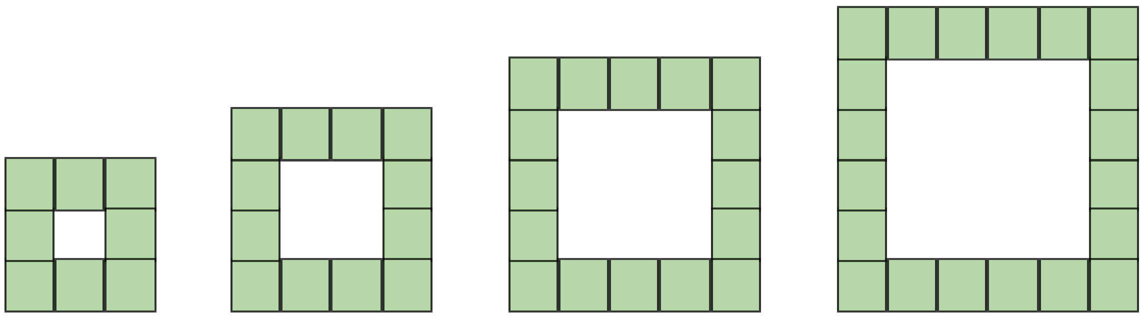
e logo

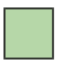
$$4 + 3(n - 1) = 1 + 3n$$

Essa equação é verdadeira para **qualquer *n***! Em casos assim, dizemos que as equações $P = 4 + 3(n - 1)$ e $P = 1 + 3n$ são **equivalentes**.

Exercício 17[12]**.** Considere o problema dos ladrilhos do exercício 16. Ache duas equações equivalentes que relacionem a ordem de uma faixa com o número de ladrilhos brancos nela.

Exercício 18. Considere as "molduras" quadradas, representadas pela sequência abaixo:



Cada unidade  será chamada **ladrilho**.

[12] Opcionalmente, se quiser continuar estudando: **i)** repita esse exercício para as frisas do exercício 15. **ii)** Pesquise sobre a *propriedade distributiva* e, a partir dela, mostre que as equações apresentadas na seção "Fórmulas equivalentes" são de fato equivalentes.

Dizemos que uma moldura é de **ordem n** quando há n ladrilhos em um de seus lados. Definimos M_n como o número de ladrilhos necessários para compor uma moldura de ordem n.

a) Calcule:

i) M_3 **ii)** M_5 **iii)** M_6

iv) M_{10} **v)** M_1

b) Indique a ordem da moldura que tem ao todo:

i) 44 ladrilhos **ii)** 60 ladrilhos **iii)** 400 ladrilhos

c) Forneça uma equação que relacione M_n com n.

d) Forneça uma equação diferente porém equivalente àquela do item **c)**.

e) Uma pessoa dispõe de uma caixa com 1001 ladrilhos. Qual é a ordem da maior moldura que ela pode fazer com os ladrilhos desta caixa?

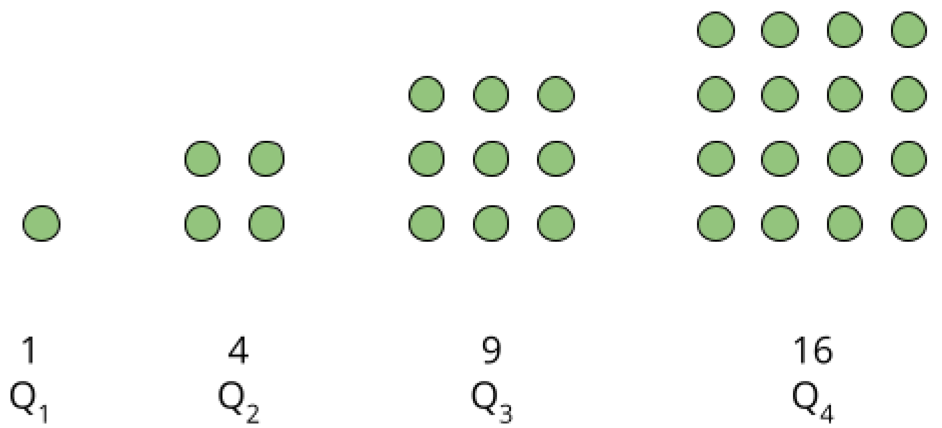
f) Considere a fórmula $M_n = n^2 - (n - 2)^2$.

i) Verifique se essa equação é equivalente àquela a que você chegou no item **c)**.

ii) Explique com suas palavras ou com um desenho qual é a ideia por trás dessa fórmula. Para isso, tente imaginar uma figura que corresponda ao n^2 e outra que corresponda a $(n - 2)^2$.

Números quadrados

São os seguintes:



Um número da forma n^2, com n natural, é chamado **quadrado perfeito** ou **número quadrado**. Deve-se aos antigos gregos tal denominação. A associação entre forma e número foi estudada pelos gregos para outros tipos de números como os triangulares, retangulares, pentagonais, hexagonais ou os piramidais. A característica da disposição *quadrada* é ter o número de linhas igual ao número de colunas. A fórmula dos números quadrados é a seguinte:

$$Q_n = n^2$$

Exercício 19.

a) Calcule:

i) Q_{13} **ii)** Q_{24} **iii)** Q_{402} **iv)** Q_0

b) Indique qual é o valor de n em cada item:

i) $Q_n = 144$ **ii)** $Q_n = 256$ **iii)** $Q_n = 2500$

iv) $Q_n = 9409$ **v)** $Q_n = 1$ **vi)** $Q_n = 0$

c)

i) Decomponha o 5º número quadrado em uma soma de 5 números ímpares;

ii) Decomponha o 4º número quadrado em uma soma de números ímpares diferentes

d) Encontre:

i) o 7º número ímpar
ii) o 15º número ímpar
iii) o 20º número ímpar
iv) o 41º número ímpar
v) o n-ésimo número ímpar

O quadrado como soma de ímpares

A sequência dos quadrados perfeitos tem muitas regularidades observáveis. Uma das mais interessantes é a que relaciona um quadrado perfeito com a soma dos números ímpares.

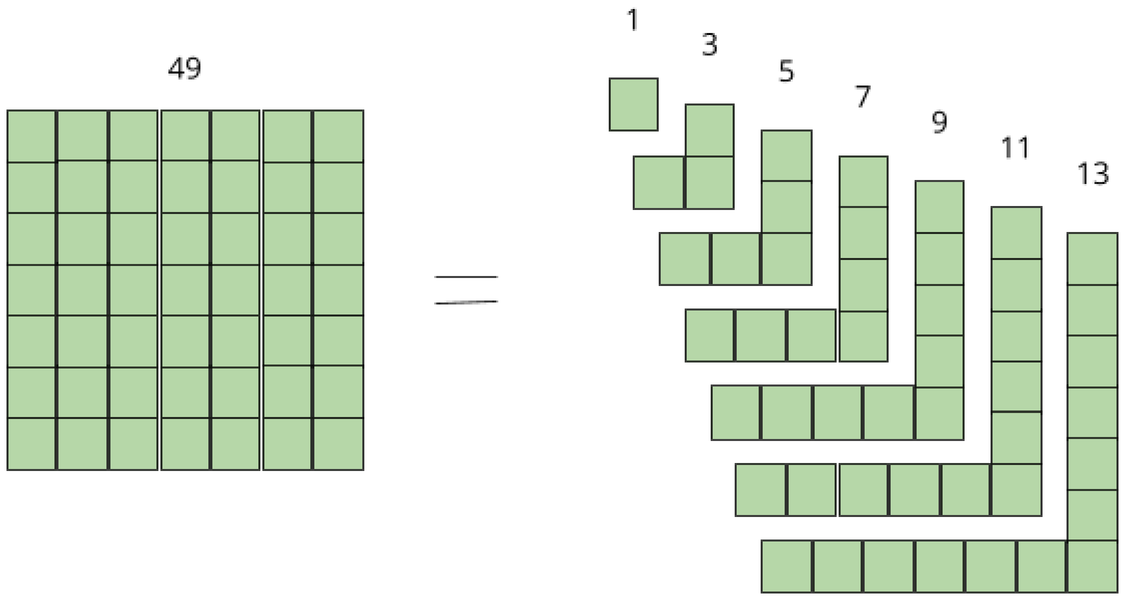
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

+1 +3 +5 +7 +9 +11 +13 +15 +17 +19

A sequência das diferenças entre dois números quadrados consecutivos é a sequência dos números ímpares. Acompanhe a decomposição do 7º quadrado, o 49:

$$
\begin{aligned}
Q_7 &= 49 \\
&= 36 + 13 \\
&= 25 + 11 + 13 \\
&= 16 + 9 + 11 + 13 \\
&= 4 + 7 + 11 + 13 \\
&= 1 + 3 + 7 + 11 + 13
\end{aligned}
$$

Ou seja, somando-se os sete primeiros números ímpares obtêm-se o sétimo número quadrado!



Exercício 20.

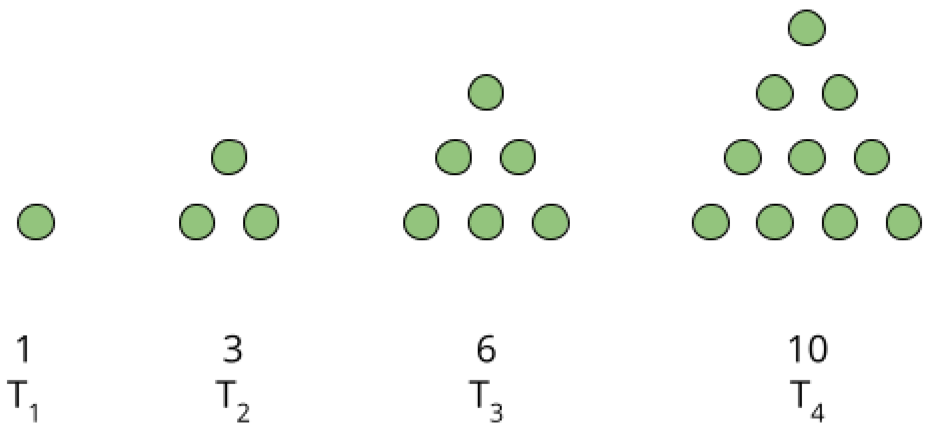
a) Como obter o 13º número quadrado com o auxílio de uma calculadora simples, em que o botão de multiplicação está quebrado?

b) Qual é o maior número ímpar utilizado na decomposição de n^2 como soma de ímpares, como descrito acima?

c) Forneça uma equação que descreva a decomposição de n^2 como soma de ímpares, como descrito acima (valendo-se dos "três pontinhos").

Números triangulares

São aqueles que, numa certa configuração, formam o desenho de triângulos.



Definimos T_n como o n-ésimo número triangular. Assim,

$$T_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n$$

Logo,

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

Mas também temos

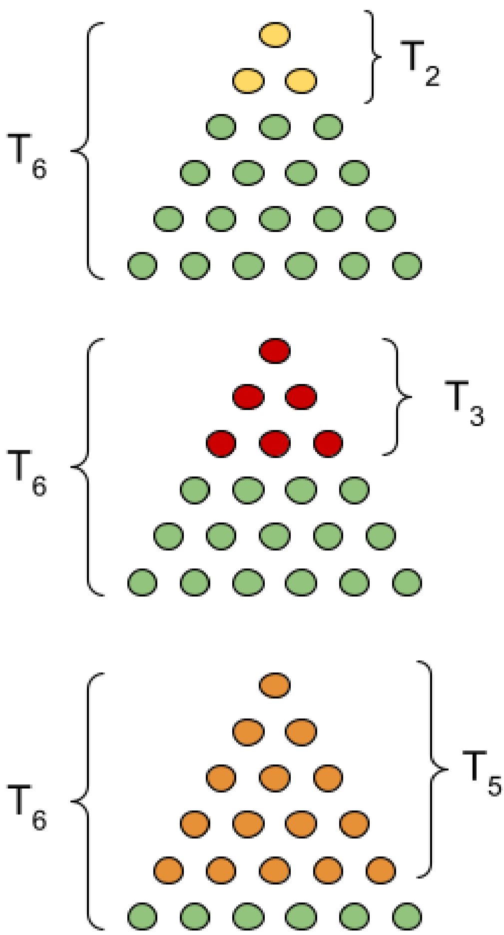
$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Mas veja que T_5 aparece dentro de T_6! Isso quer dizer que

$$T_6 = T_5 + 6$$

O que faz sentido, se olharmos a figura ao lado. Repare que o topo de todo triângulo é sempre outro triângulo menor. De modo geral, temos:

$$T_n = T_{n-1} + n$$



Exercício 21.

a) Dê o valor dos 10 primeiros números triangulares.

b) Sabendo que $T_{25} = 325$, determine o valor de T_{24} e de T_{26}.

c) Dê o valor das diferenças:

i) $T_{54} - T_{53}$ **ii)**$T_{47} - T_{46}$ **iii)**$T_{100} - T_{99}$

iv)$T_{n} - T_{n-1}$

Somando sequências

É relativamente fácil realizar a soma para descobrir o 10º número triangular:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

Mas é uma conta trabalhosa de se fazer. E se quiséssemos, ainda por cima, achar o 50º número triangular? Ou o 100º? Esse problema foi resolvido, com bastante engenhosidade, por um garoto chamado Gauss, que mais tarde tornou-se um dos maiores matemáticos da história.

Conta-se que, aos nove anos de idade, Gauss era um aluno bastante irrequieto. Certa vez, num daqueles dias de bagunça, seu professor, a fim de fazê-lo ficar quieto e concentrado, ordenou-lhe que encontrasse a soma dos 100 primeiros números naturais.

Para surpresa de todos, três minutos depois da ordem, Gauss deu a resposta certa: 5050. Como ele teria feito o cálculo com tanta rapidez? Sua sacada foi a seguinte:

$$T_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$
$$T_{10} = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

Ele percebeu que se escrevesse a mesma soma em ordem crescente e depois em ordem decrescente, um padrão surgiria. Se você somar cada número com o que está logo abaixo, o resultado é sempre o mesmo! Gauss então somou os dois jeitos de escrever a mesma coisa:

$$T_{10} + T_{10} = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11$$
$$2 \cdot T_{10} = 10 \cdot 11$$

$2 \cdot T_{10} = 110$

$T_{10} = 55$

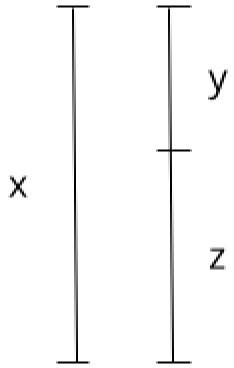
Exercício 22.

a) Use raciocínio semelhante para achar T_{24}, T_{29}, T_{99} e T_{1000}.
b) Faça a soma de todos os números inteiros entre e inclusive o 4 e o 16.
c) Determine a soma dos primeiros 20 primeiros números pares positivos.
d) Calcule a soma dos primeiros 30 primeiros múltiplos de 3 positivos.
e) Calcule a soma dos 10 primeiros múltiplos positivos de 10.
f) Compare o resultado do item anterior com a soma dos 10 primeiros inteiros positivos. O que você conclui?
g) Calcule a soma dos primeiros 30 ímpares positivos.

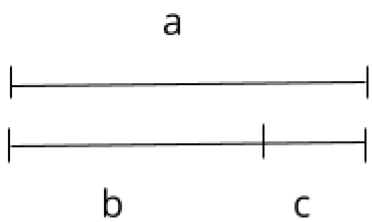
Exercício 23. Utilizando o método de Gauss, deduza a equação que define um número triangular. Em outras palavras, encontre uma equação que relacione T_n com n.

Álgebra para comprimentos

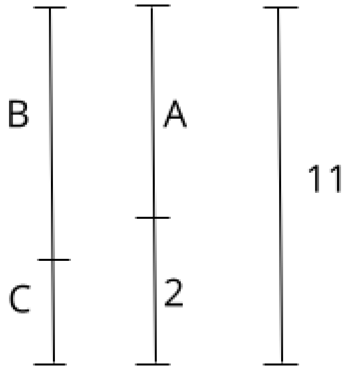
As variáveis usadas na álgebra podem ser usadas para expressar medidas de comprimento. Isso será útil para expressar relações entre eles. Veja:



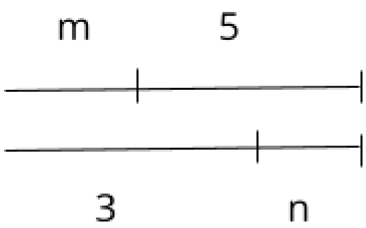
$x = y + z$
$y = x - z$
$z = x - y$



$a = b + c$
$b = a - c$
$c = a - b$



$B = A + 2 - C$
$B > A$
$C > 2$
$A + 2 = 11$
$A = 9$
$B > 9$



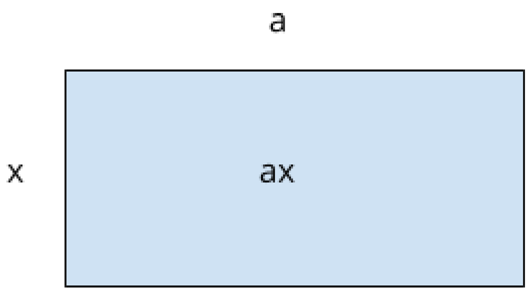
$m = (n + 3) - 5$
$m = n - 2$

$n = (m + 5) - 3$
$n = m + 2$

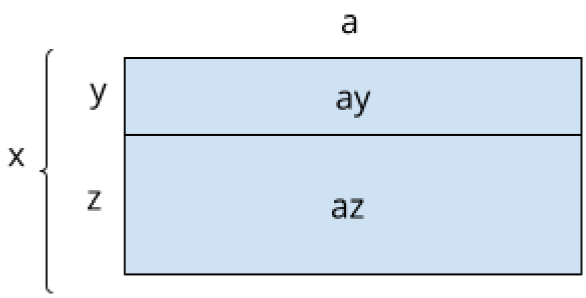
$m < 3$
$n < 5$

Decompondo retângulos

Considere o retângulo de lados *a* e *x* abaixo.



A área desse retângulo é dada por A = *ax*. Veja agora essa mesma figura decomposta em dois retângulos:



$$A = ax$$

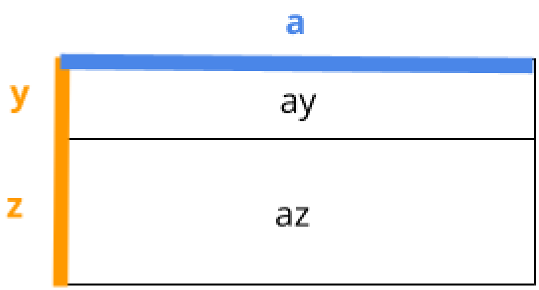
$$x = y + z$$

$$A = a(y + z)$$

$$A = ay + az$$

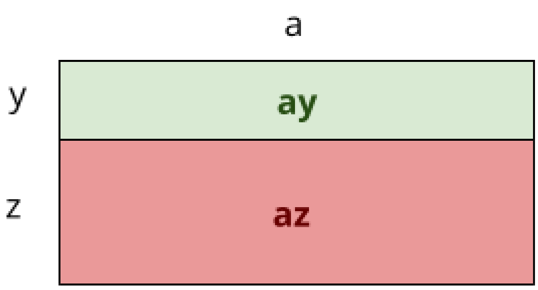
Note que podemos calcular essa área de duas formas. Primeiro, podemos multiplicar o comprimento da base pelo comprimento da altura, obtendo:

$$A = a(y + z)$$



Mas também podemos fazer esse cálculo somando as áreas obtidas nos dois retângulos internos:

$$A = ay + az$$



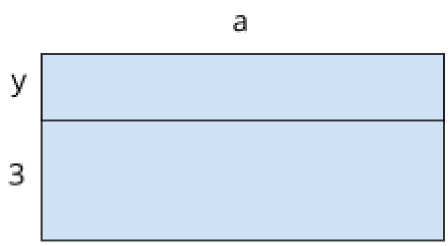
Mas os dois jeitos de achar a área estão corretos. Isso quer dizer que os dois devem valer sempre a mesma coisa! Como sabemos, trata-se de duas equações equivalentes. Em outras palavras,

$$A = a(y + z) = ay + az$$

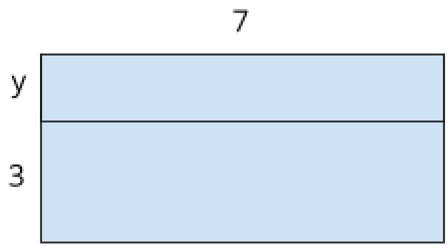
Exercício 24. Volte à seção “Álgebra dos comprimentos” e analise a figura em seu início. Uma das sentenças apresentadas está errada. Descubra qual é.

Exercício 25. Expresse algebricamente as áreas das figuras abaixo:

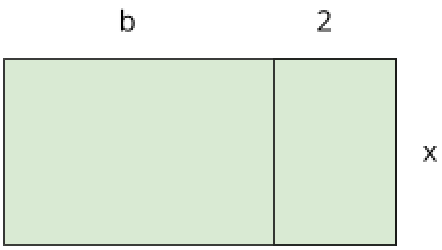
a)



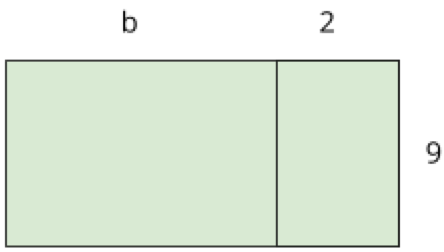
b)



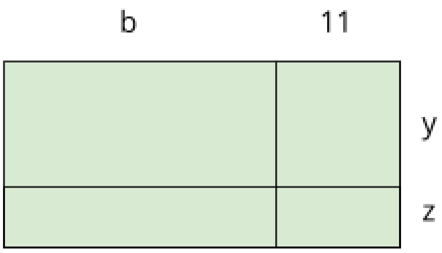
c)



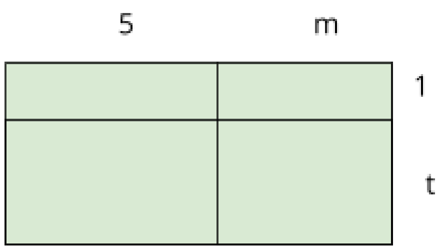
d)



e)



f)



Exercício 26. Recorte quatro retângulo com as seguintes especificações:

- 2×3 cm
- $2 \times m$ cm;
- $3 \times t$ cm;
- $m \times t$ cm.

Você pode escolher as dimensões m e t à vontade. Com os quatro recortes monte um retângulo e dê a expressão algébrica de sua área.

Exercício 27. Forneça as expressões correspondentes aos perímetros das figuras do exercício 25.

Exercício 28. Em cada item do exercício 25, ache uma expressão equivalente mas diferente para a área encontrada para as figuras.

Propriedade distributiva

Faça o seguinte cálculo, mentalmente: $59 \cdot 101$ (faça isso antes de continuar lendo!) Talvez você tenha rapidamente chegado ao resultado, 5959, pelo seguinte raciocínio: 59 vezes 100 é igual a 5900. Basta adicionar 59 a isso para chegar ao resultado final: $5900 + 59 = 5959$.

A propriedade numérica por trás desse raciocínio é a **propriedade distributiva** da multiplicação em relação à adição. Podemos entender o raciocínio da seguinte forma: vamos reescrever a conta

$$59 \cdot 101$$

como

$$59 \cdot (100 + 1)$$

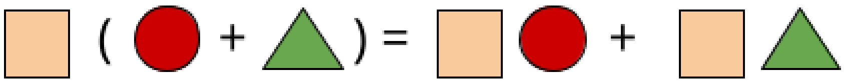
Repare que $59 \cdot 101$ e $59 \cdot (100 + 1)$ são a mesma conta: só fizemos reescrever o 101 como uma conta de mesmo valor. Repare também a importância dos parênteses: eles indicam que queremos fazer primeiro a soma e só depois a multiplicação. Continuando, sabemos que isso é o mesmo que

$$59 \cdot 100 + 59 \cdot 1$$

O que está acontecendo: ao multiplicar o 59 por uma soma, nós **distribuímos** o 59 para cada parcela dessa soma, multiplicando-o por cada uma:

$$59 \cdot (100 + 1) = 59 \cdot 100 + 59 \cdot 1$$

E isso vale em geral: sempre que multiplicamos um valor por uma soma, isso é o mesmo que a adição de cada parcela da soma multiplicada por



esse valor. Ou então:

Ou, equivalentemente[13]:

$$x(a + b) = xa + xb$$

Exercício 29. Resolva as seguintes equações:

a) $19x + 4 = 42$
b) $3(x + 1) = 10,5$
c) $x(4 + x) - x^2 = 8$
d) $y(y + 3) = y^2 + 7$
e) $17k + 4 = 3(k + 2)$
f) $12(i + 5) = 16i + 3$
g) $0,5(j + 3) = 7$
h) $0,7m + 0,3m = 30(m + 16)$
i) $-19x + 4 = 42$
j) $3(-x + 1) = 10,5$
k) $-2w(4 + w) + 2w^2 = 8$
l) $17k + 4 = -3(-k + 2)$
m) $-8(a + 3,7) = -19,6$
n) $5(z + 3) = 12(6 - z)$

[13] Na verdade, a propriedade é mais genérica ainda, e se estende para somas de quaisquer número de parcelas: $x(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) = xa_1 + xa_2 + xa_3 + ... + xa_n$