Por volta do século VI a.C. pensadores gregos da escola de Pitágoras se interessavam pelas relações entre os números naturais. Uma das ideias que surge nesse período é a de que alguns números **originam** outros. Por exemplo, considere o número *1*: ele forma todos os outros números naturais: basta somar o um a ele mesmo tantas vezes quanto for necessário.

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
2 &= 1 + 1 \\
3 &= 1 + 1 + 1 \\
&\ldots \\
n &= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ vezes}}
\end{aligned}
$$

Bem, mas isso só é verdade quando se considera a adição. Na **multiplicação**, o *1* passa de super-poderoso para nulo, pois não forma nenhum número novo! Dizemos que o 1 é o *elemento neutro da multiplicação*. A partir daqui, vamos pensar a geração de números somente pela multiplicação.

E o 2? Que outros números podemos formar?

$$
\begin{aligned}
2 &= 2 \\
4 &= 2 \cdot 2 \\
8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\
16 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Note que não conseguimos gerar o próprio 2 a partir de nenhum outro número natural. Podemos pensar que o 2 é **gerador** de outros números, mas não é gerado por nenhum outro.

**exercício 1.**

**a)** Quantos são os números que podem ser gerados pelo número dois?
**b)** Como chamam-se os números que podem ser gerados pelo número dois?
**c)** Dê um exemplo de um número que não pode ser gerado pelo número dois.

***

Você deve ter notado que existem mais números geradores além do dois. Veja os exemplos:

- O número **210** pode ser obtido multiplicando-se **6** por **35**
  - O número **6** pode ser obtido multiplicando-se **2** por **3**
  - O número **35** pode ser obtido multiplicando-se **5** e **7**
  - Os números 2, 3, 5, e, 7 não podem ser formados por outros números naturais por meio da multiplicação. Logo, eles são os geradores ou **fatores** do **210**.

$$210 = 6 \cdot 35$$
$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 35$$
$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

**Produto e fatores**

Suponha que estamos fazendo uma conta de multiplicação qualquer:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$$

**Fator** é o nome que damos aos números que estão sendo multiplicados
**Produto** é o nome que damos ao resultado da multiplicação

Analogamente, na soma temos as **parcelas** e a **soma**.

Daí o nome **fatoração**. **Fatorar** quer dizer escrever alguma coisa **como uma multiplicação**. Veja como exemplo a fatoração do número 210:

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Os  números naturais que formam outros números naturais por meio da multiplicação são chamados **números primos**. Porque primo? Um dos significados da palavra primo é “primeiro”. Os antigos gregos julgavam que os números primos são os primeiros em importância, pelo fato de gerarem todos os demais. Dizemos que os números que não são primos são **compostos**.

| | | |
|---|---|---|
| gerador | <-> | primo |
| gerado | <-> | composto |

**exercício 2.**

**a)** O número 2171 é múltiplo de 13 e de 167. O número 2171 é primo? E o número 41, é primo? Justifique as respostas.

**b)** Estamos considerando aqui a seguinte definição de número primo: “aquele que é gera mas não é gerado”. Existe outra definição, que você já deve ter ouvido, que diz que o número primo é “aquele que só é divisível pelo número 1 e por ele mesmo”. Essas duas definições são equivalentes? Ou seja, existe algum número que é primo de acordo com uma das definições mas não é primo de acordo com a outra?

**c)** Complete as sentenças.

**i)** $30 = \ldots\ldots \cdot 5 = \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots$

**ii)** $44 = \ldots\ldots \cdot 11 = \ldots\ldots^{2} \cdot \ldots\ldots$

**iii)** $200 = 8 \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots^{3} \cdot \ldots\ldots^{2}$

**d)** Considere a sequência dos múltiplos de 6:

6, 12, 18, 24, 30 ...

Decomponha os seguintes múltiplos de 6 em fatores primos: **6, 18, 30 e 42**. Quais são os fatores primos comuns a todas essas decomposições?

**e)** Veja que coincidência:

- divisores de 6: **1, 2, 3**
- soma desses divisores: **1 + 2 + 3 = 6**

*O que que é um divisor, mesmo?*

Os gregos da escola de Pitágoras chamaram os números que apresentam essa propriedade de **números perfeitos**.

**i)** Descreva com suas palavras a propriedade a que estamos nos referindo. Ou então: o que faz um número ser **perfeito?**

**ii)** O número 10 é perfeito? Justifique.

**iii)** Há um número perfeito entre 25 e 30. Que número é esse? Justifique.

**exercício 3.**

Faça uma tabela como a mostrada abaixo, preenchendo-a até n = 20. Sugiro usar uma planilha eletrônica. Se fizer no caderno, você vai precisar de uma calculadora.

| **n** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1/n** | 1 | 0,5 | 0,333... | ? | ? | ? | ? |

Alguns desses quocientes são números decimais com um número **finito** de casa decimais e outros são **dízimas periódicas**, ou seja, têm infinitas casas decimais. Reflita sobre o motivo por que algumas divisões terminam e outras não, e responda a pergunta: que característica deve ter o número $n$ para que $\frac{1}{n}$ , na forma decimal, tenha um número finito de casas decimais? Registre as etapas da investigação:

exploração
elaboração de hipóteses
verificação das hipóteses elaboradas
conclusão (*somente se possível: essa é a parte menos importante*)

**exercício 4.**

**a)** Veja o exemplo ao lado. Aproveite-o e calcule:

i) mmc(77; 49)
ii) mmc(132; 165)

| | | |
|---|---|---|
| 77, | 132 | 2 |
| 77, | 66 | 2 |
| 77, | 33 | 3 |
| 77, | 11 | 7 |
| 11, | 11 | 11 |
| 1 | | |

**Conclusão:**
mmc(77; 132) = $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 924$

**b)** Em uma corrida de fórmula 1, um piloto brasileiro completava uma volta na pista a cada 84 segundos. Mas um piloto alemão, com um carro mais veloz, dava uma volta a cada 66 segundos. Sabendo que eles largaram juntos, quanto tempo depois passaram juntos novamente pelo ponto de partida? Nesse momento, quantas voltas cada um completou?

**c)** Complete a tabela.

| **a** | 2 | 5 | 7 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| **b** | 3 | 7 | 11 | 13 |
| **mmc(a; b)** | | | | |

Analisando os dados da tabela, responda: se **a** e **b** são números primos, o que se pode conlcuir sobre **mmc(a; b)**?

**d)** Complete a tabela.

| **a** | 4 | 6 | 9 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| **b** | 5 | 7 | 10 | 15 |
| **mmc(a; b)** | | | | |

Analisando os dados da tabela, responda: se **a** e **b** são números consecutivos (ou então, se **b** é *sucessor* de **a**), o que se pode conlcuir sobre **mmc(a; b)**?

**e)** Complete a tabela.

| **a** | 4 | 6 | 15 | 42 |
|---|---|---|---|---|
| **b** | 8 | 18 | 45 | 84 |
| **mmc(a; b)** | | | | |

Analisando os dados da tabela, responda: se **b** é múltiplo de **a**, o que se pode concluir sobre **mmc(a; b)**? E se **b** for divisor de **a**?

**exercício 5.**

**a)** Numa demonstração de ginástica aeróbica, menos de 200 participantes foram distribuídos em vários quadrados, com 36 pessoas em cada um. Mais tarde eles saíram em grupos de 20. Quantos atletas participaram da demonstração?

**b)** João é piloto de avião. Ele faz a rota São Paulo-Manaus a cada 15 dias. Paulo é comissário de bordo na mesma companhia aérea. Ele trabalha no voo São Paulo-Manaus a cada 12 dias. João e Paulo estavam no mesmo voo São Paulo-Manaus no dia 1º de maio. Em que dia de junho eles se reencontrarão a bordo?

**c)** Calcule (dica: lembre do que você descobriu no exercício **4c)**, **d)** e **e)**):

i) mmc(4; 5; 6)
ii) mmc(20; 25; 30)
iii) mmc(40; 50; 60)
iv) mmc(2; 4; 8; 16; 32)
v) mmc(2; 3; 5; 7)
vi) mmc(2; 3; 4; 5)